ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υπόγεια Υδραυλική και Υδρολογία

Ενότητα 3: Εξίσωση συνέχειας-Μαθηματικό ομοίωμα

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Εξίσωση συνέχειας-Μαθηματικό ομοίωμα

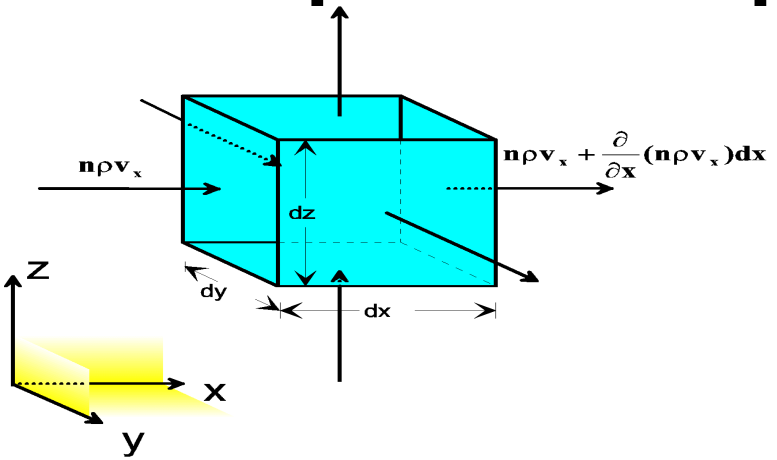
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (1/4)

- Ο νόμος του Darcy και η εξίσωση συνεχείας παρέχουν τις απαραίτητες διαφορικές εξισώσεις για την επίλυση των προβλημάτων της Υπόγειας Υδραυλικής
- Για τη διατύπωση της εξίσωσης συνεχείας εφαρμόζεται η αρχή της διατήρησης της μάζας σε απειροστό όγκο

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (2/4)

- **Κίνηση του ρευστού κατά τη διεύθυνση x**



Σχήμα 1: μεταβολή μάζας στο στοιχειώδη όγκο.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, Υπόγεια Υδραυλική, εκδ. Παρατηρητής 1997, σελ. 31.

- Ποσότητα του ρευστού που παραμένει στο στοιχειώδη όγκο κατά τη διεύθυνση x:

$$\left\{n\rho v_x - \left[n\rho v_x + \frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x}dx\right]\right\}dydz =$$

$$-\frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x}dxdydz$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (3/4)

- Διεύθυνση x: $-\dfrac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x}dxdydz$
- Διεύθυνση y: $-\dfrac{\partial(n\rho v_y)}{\partial y}dxdydz$
- Διεύθυνση z: $-\dfrac{\partial(n\rho v_z)}{\partial z}dxdydz$

$$\frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(n\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(n\rho v_z)}{\partial z}=0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (4/4)

$$\frac{\partial(n\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

- **Σταθερό πορώδες και ασυμπίεστο ρευστό:**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

- **Η εξίσωση συνεχείας ως συνάρτηση των ταχυτήτων διήθησης**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

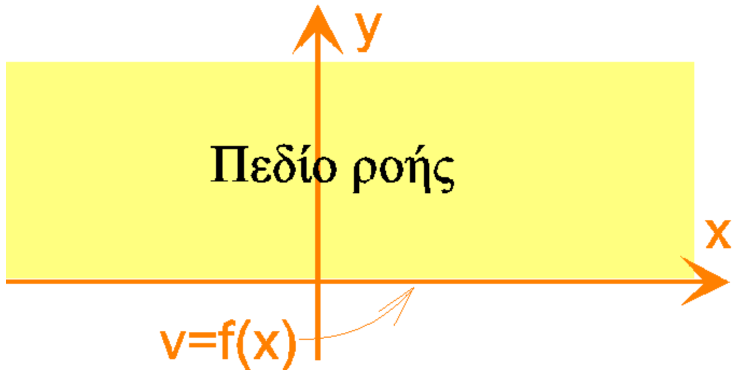
ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ – ΑΣΚΗΣΗ (1/2)

Σε μια διδιάστατη υπόγεια ροή οι οριζόντιες συνιστώσες των ταχυτήτων διήθησης δίνονται σε κάθε σημείο του πεδίου ροής από τον τύπο

$$u = A + Bx$$

όπου A και B σταθερές ποσότητες. Αν στο οριζόντιο όριο του πεδίου ροής y=0 οι κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων διήθησης δίνονται από τη συνάρτηση v(x,0)=f(x), να καταστρώσετε τον τύπο που δίνει τις κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ – ΑΣΚΗΣΗ (2/2)



$$u = A + Bx$$

Εξίσωση συνεχείας: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -B$$

$$v = -By + C(x)$$

$$\text{Για } y = 0 \text{ είναι: } v = f(x) \rightarrow C(x) = f(x)$$

$$v = -By + f(x)$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ (1/2)

- Συνιστώσες ταχύτητας: $$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

- Αντικατάσταση στην εξίσωση συνεχείας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Θεμελιώδης εξίσωση Υπόγειας Υδραυλικής:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$ **(Εξίσωση Laplace)**

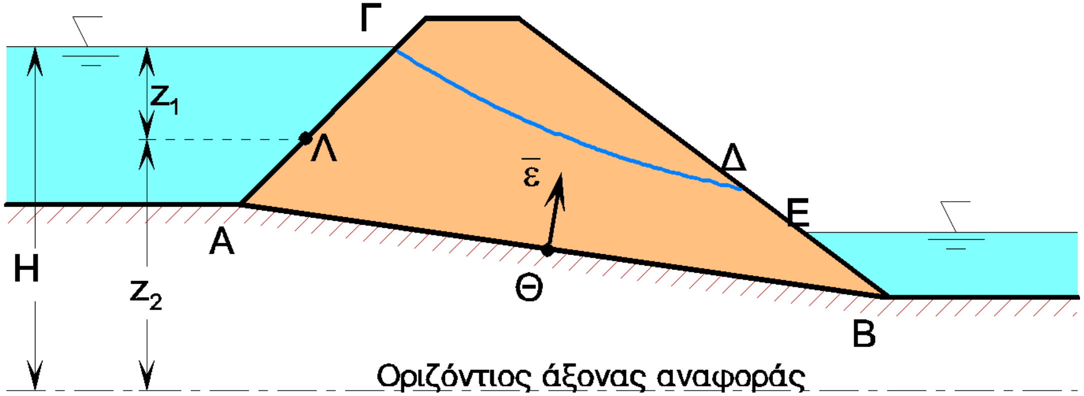
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ (2/2)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- Η εξίσωση Laplace αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση και σ' άλλους τομείς της μαθηματικής φυσικής
- Το μαθηματικό ομοίωμα ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των οριακών συνθηκών.

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (1/4)

- **Όριο δεξαμενής: Επιφάνεια επαφής του πορώδους υλικού του κορεσμένου με ρευστό με το ελεύθερο ρευστό (ΑΓ, ΒΕ)**



Σχήμα 2: Όριο δεξαμενής.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 34.

$$\Phi = -Kh = -K\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) = -K(z_1 + z_2) = -KH = \sigma\tau\alpha\theta$$

- Τα όρια δεξαμενής αποτελούν ισοδυναμικές επιφάνειες

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (2/4)

- Αδιαπέρατο όριο: Επιφάνεια επαφής πορώδους υλικού του κορεσμένου με ρευστό με αδιαπέρατη στρώση (ΑΒ).

$$\Psi = \sigma\tau\alpha\theta \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}} = 0$$

- Τα αδιαπέρατα όρια αποτελούν γραμμές ροής.

ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (3/4)

- **Ελεύθερη επιφάνεια:**

  Επιφάνεια επαφής του πορώδους υλικού του κορεσμένου με ρευστό, με το πορώδες υλικό το κορεσμένο με ατμοσφαιρικό αέρα (ΓΔ).

$$\Phi = -Kh = -K\left(\frac{p_\alpha}{\rho g} + z\right) \rightarrow \Phi + Kz = -K\frac{p_\alpha}{\rho g} = \sigma\tau\alpha\theta \rightarrow \Phi + Kz = 0$$

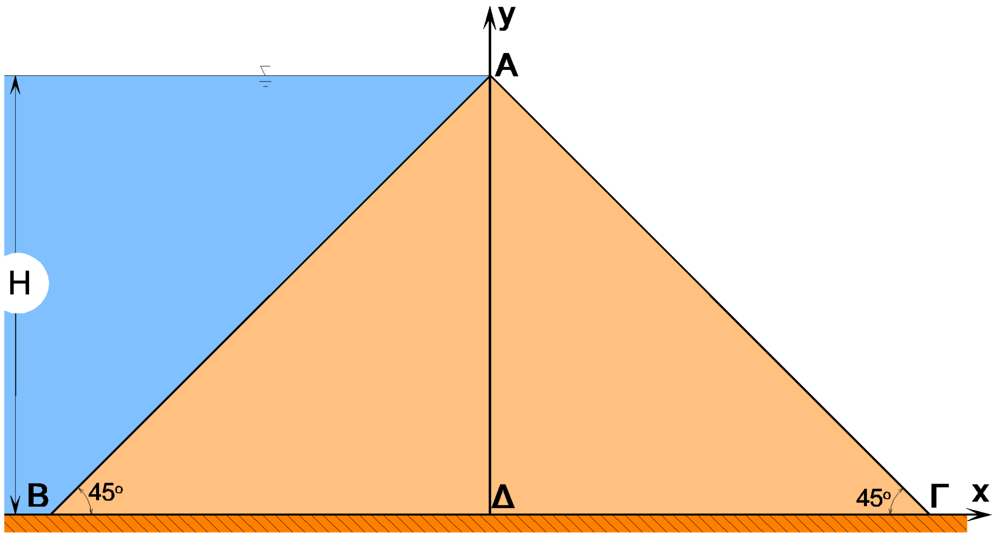
ΤΥΠΟΙ ΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (4/4)

Επιφάνεια διήθησης:

Επιφάνεια επαφής του πορώδους υλικού του κορεσμένου με ρευστό, με τον ελεύθερο ατμοσφαιρικό αέρα (ΔΕ).

$$\Phi = -Kh = -K\left(\frac{p_\alpha}{\rho g} + z\right) \rightarrow \Phi + Kz = -K\frac{p_\alpha}{\rho g} = \sigma\tau\alpha\theta \rightarrow \Phi + Kz = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1/14)



Σχήμα 3: Όριο δεξαμενής.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

- Λύση: → $$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H-y)^2}{4H}\right] \quad (?)$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2/14)

$$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H-y)^2}{4H}\right]$$

- **Διαφορική εξίσωση Laplace:**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{x}{H}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{K}{2H}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{K}{2}\left(-1 + \frac{H-y}{H}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{K}{2H}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{K}{2H} - \frac{K}{2H} = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3/14)

$$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}\right]$$

- **Όριο ΑΒ:**
  - **Εξίσωση: y=x+H**
  - **Οριακή συνθήκη: Φ=-ΚΗ**

$$\Phi_{y=x+H} = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}\right]_{y=x+H} =$$

$$= K\left[-H + \frac{1}{2}(x - x - H + H) + \frac{x^2 - x^2}{4H}\right] = -KH$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (4/14)

- **Όριο ΒΓ:**
  - **Εξίσωση: y=0**
  - **Οριακή συνθήκη:**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (?)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{K}{2}\left(-1 + \frac{H-y}{H}\right)_{y=0} = \frac{K}{2}\left(-1 + \frac{H}{H}\right) = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (5/14)

- **Όριο ΑΓ:**
  - **Εξίσωση: x+y=H**
  - **Οριακή συνθήκη:**

$$\boxed{\Phi + Ky = 0 \quad (?)}$$

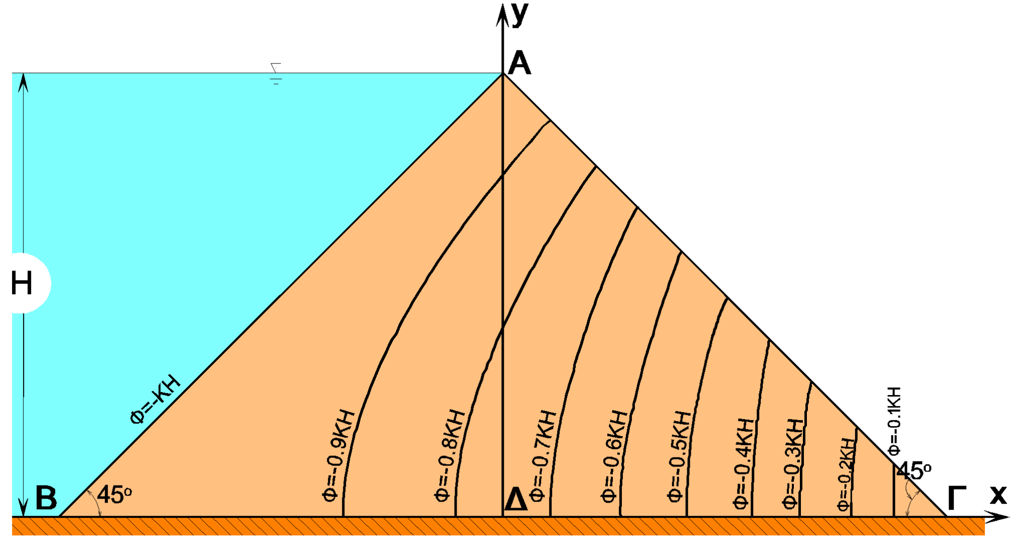
$$\Phi_{x=H-y} = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H-y)^2}{4H}\right]_{x=H-y} + Ky =$$

$$= K\left[-H + \frac{1}{2}(H - y - y + H) + \frac{(H-y)^2 - (H-y)^2}{4H}\right] + Ky = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (6/14)

- **Ισοδυναμικές γραμμές :**

$$\Phi = K\left[-H+\frac{1}{2}(x-y+H)+\frac{x^2-(H-y)^2}{4H}\right] = A \ (A = -0.9KH, -0.8KH, ...)$$



Σχήμα 4: Όριο δεξαμενής.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ– ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (7/14)

- **Ταχύτητες διήθησης και παροχές**

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{x}{H}\right)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -K\,\frac{y}{2H}$$

- **Διατομή ΑΔ : (x=0)**

Οριζόντιες ταχύτητες :

$$u = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{x}{H}\right)_{x=0} = \frac{K}{2}$$

Παροχή :

$$q = uH = \frac{KH}{2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (8/14)

- **Υπολογισμός ροϊκής συνάρτησης**

  - **Συνθήκες Cauchy - Riemann:** $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}\right] \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{x}{H}\right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{x}{H}\right) \longrightarrow \Psi = \frac{Ky}{2} + \frac{Kxy}{2H} + f_1(x)$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (9/14)

- **Υπολογισμός ροϊκής συνάρτησης**

Συνθήκες Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}\right] \longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{Ky}{2H}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{Ky}{2H} \longrightarrow \Psi = \frac{Kxy}{2H} + f_2(y)$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (10/14)

- **Υπολογισμός ροϊκής συνάρτησης**

$$\Psi = \frac{Ky}{2} + \frac{Kxy}{2H} + f_1(x)$$

$$\Psi = \frac{Kxy}{2H} + f_2(y)$$

$$f_1(x) = C$$

$$f_2(y) = \frac{Ky}{2} + C$$

$$\Psi = \frac{Kxy}{2H} + \frac{Ky}{2} + C$$

Γραμμή ροής αναφοράς (Ψ=0): ΒΓ: y=0: C=0

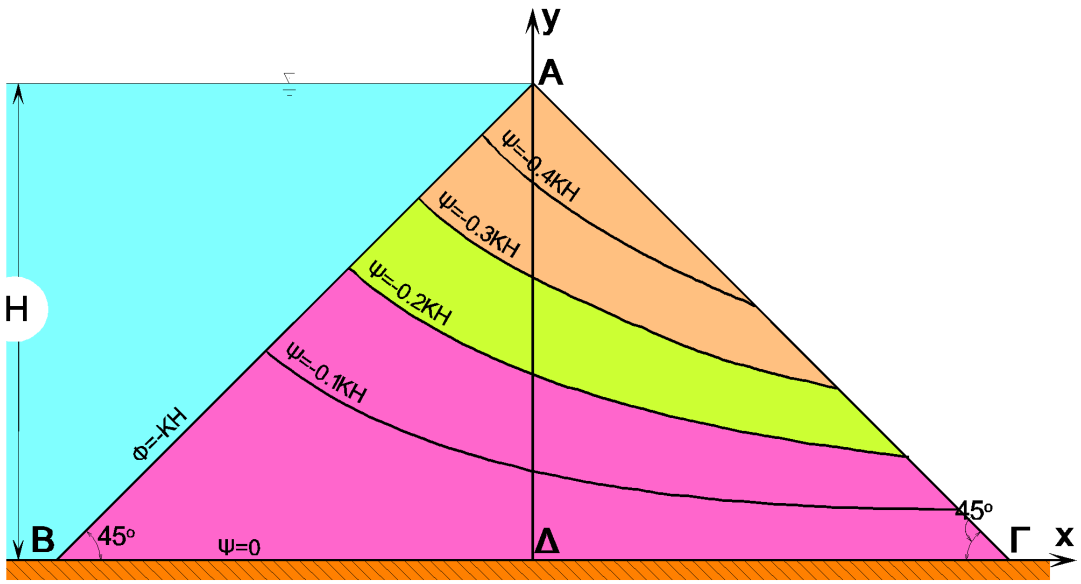
$$\Psi = \frac{Kxy}{2H} + \frac{Ky}{2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (11/14)

- **Υπολογισμός παροχής**

$$\Psi = \frac{Kxy}{2H} + \frac{Ky}{2}$$

$$q_{ij} = \Psi_i - \Psi_j$$



Σχήμα 5: Όριο δεξαμενής.

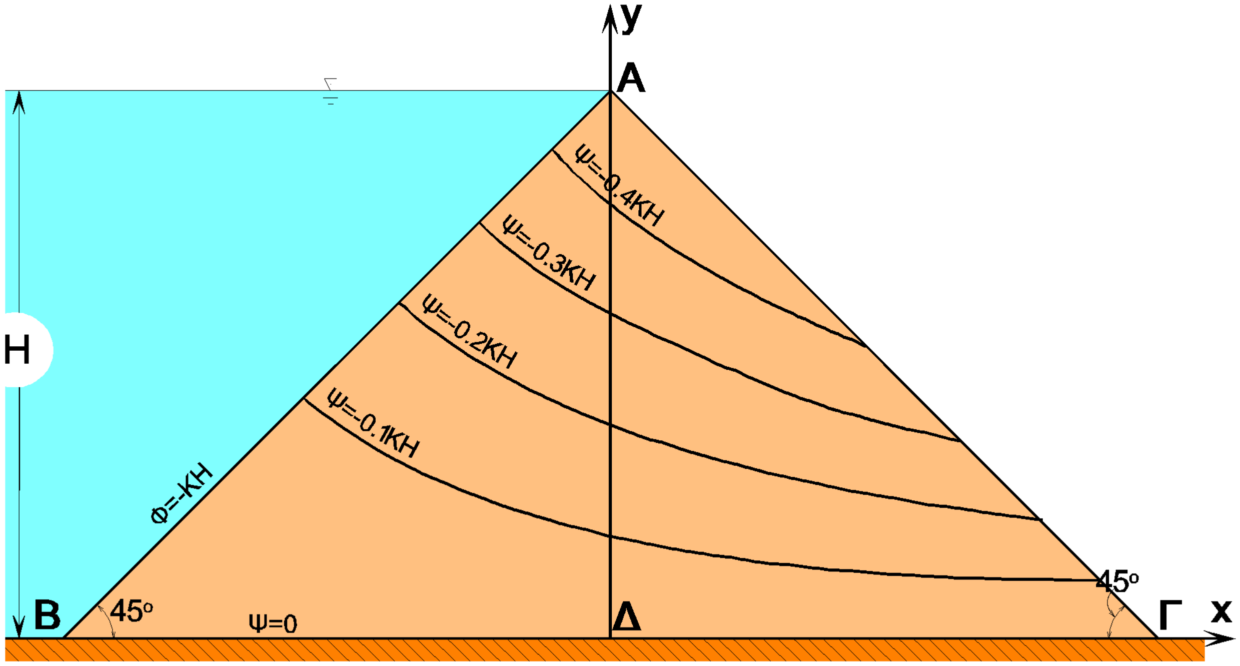
Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

Παροχή που διέρχεται από το φράγμα:

$$q = \Psi_A - \Psi_0 = \frac{KH}{2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (12/14)

- **Γραμμές ροής με βήμα 0,1ΚΗ**

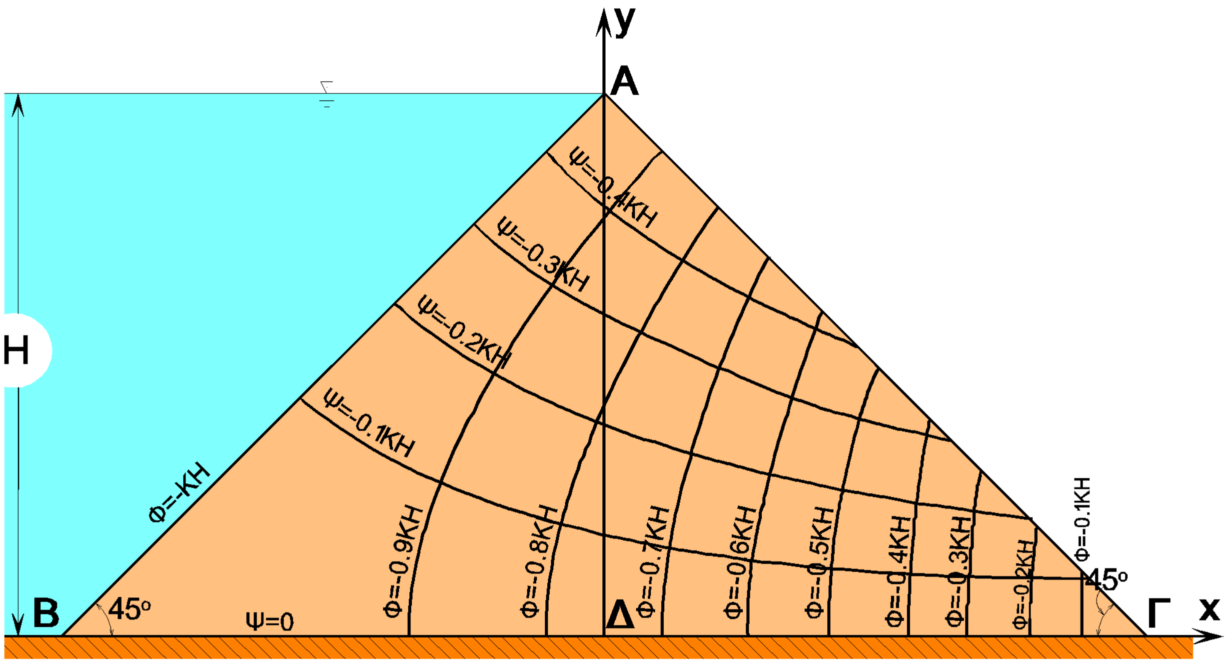


Σχήμα 6: Όριο δεξαμενής.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (13/14)

- **Τετραγωνικό δίκτυο ισοδυναμικών γραμμών και γραμμών ροής**



Σχήμα 7: Όριο δεξαμενής.

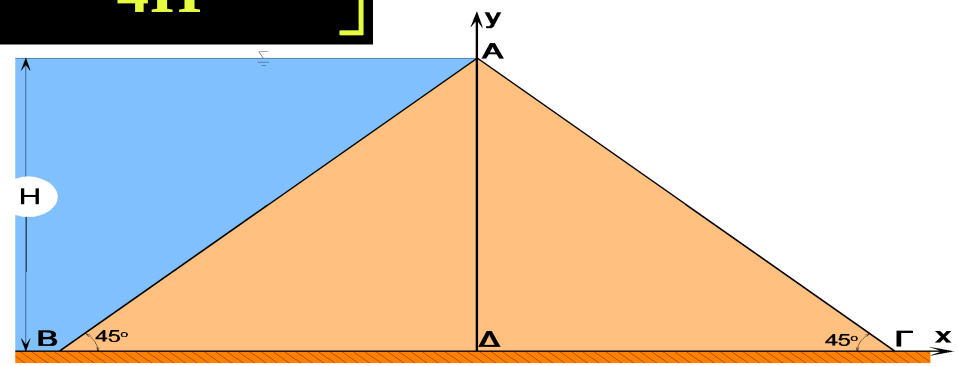
Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (14/14)

- **Υπολογισμός υδροστατικών πιέσεων**

$$\Phi = K\left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}\right]$$

$$\Phi = -K\left(\frac{P}{\rho g} + y\right)$$



Σχήμα 8: Όριο δεξαμενής.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, 1997, σελ. 38.

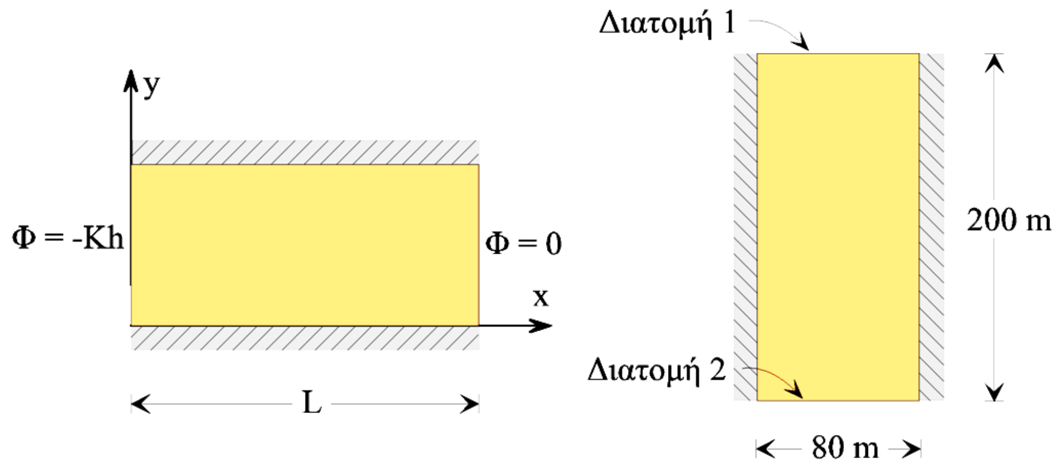
$$\frac{P}{\rho g} = H - \frac{1}{2}(x + y + H) - \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1/7)

Α) Στην υπόγεια ροή του αριστερού σχήματος να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δυναμικού δίνεται από τον τύπο

(0.5 μονάδες)

$$\Phi = -Kh\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$



Σχήμα 9: σχήμα παραδείγματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (2/7)

Β) Με βάση τη λύση του ερωτήματος Α να υπολογίσετε την κατεύθυνση της ροής και την παροχή που διηθείται από τη διατομή 2 στην κατακόρυφη διδιάστατη ροή του δεξιού σχήματος, όταν οι υδροστατικές πιέσεις στις διατομές 1 και 2 είναι αντίστοιχα 12 m και 84 m και ο συντελεστής σχετικής διαπερατότητας είναι $K=5.10^{-4}$ m/sec

(2 μονάδες)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (3/7)

- **Διαφορική εξίσωση**

$$\Phi = -Kh\left(1-\frac{x}{L}\right) \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{Kh}{L} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

- **Οριακές συνθήκες**

$$\Gamma\iota\alpha\ x = 0 \rightarrow \Phi = -Kh$$

$$\Gamma\iota\alpha\ x = L \rightarrow \Phi = 0$$

$$\Sigma\tau\alpha\ \alpha\delta\iota\alpha\pi\acute{\epsilon}\rho\alpha\tau\alpha\ \acute{o}\rho\iota\alpha \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (4/7)

- Υδραυλικό φορτίο στη διατομή 2: h_2=84-84=0 m

(Ο αυθαίρετος άξονας αναφοράς λαμβάνεται σε απόσταση 84 m πάνω απ' τη διατομή 2)

$$\Phi = -Kh\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

- Υδραυλικό φορτίο στη διατομή 1: h_1=12+(200-84)=128 m

- Κατεύθυνση ροής: Από διατομή 1 προς διατομή 2

- Παροχή: $$q = v.80 = \frac{Kh}{L}.80 = \frac{5.10^{-4}.128}{200}80 = 256.10^{-4}\,m^2/sec$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ– ΑΣΚΗΣΕΙΣ (5/7)

Διαμέσου του κατακόρυφου διαπερατού στρώματος του σχήματος διηθείται το νερό της λίμνης. Αν η υδροστατική πίεση κατά μήκος της διατομής ΓΔ είναι σταθερή και ίση με H_2 μέτρα στήλης νερού και το δυναμικό στην ίδια διατομή είναι Φ=0

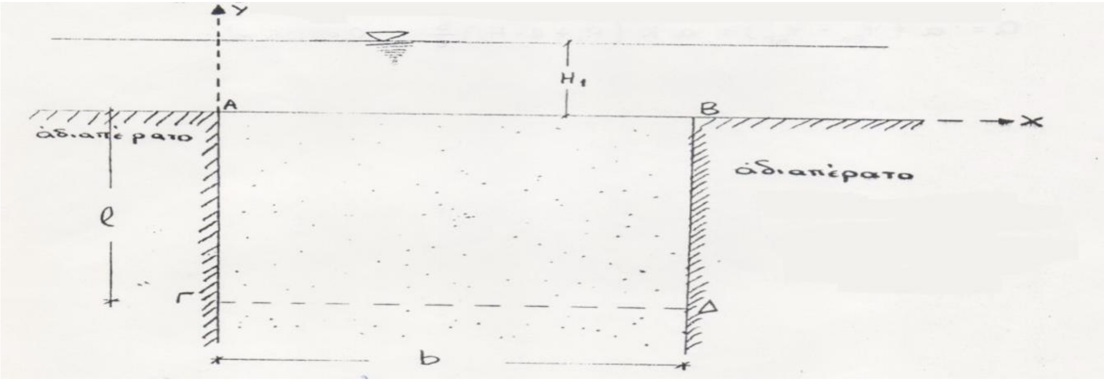
Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi = -K\,(H_1 + l - H_2)\,(1 - y/l)$ δίνει το δυναμικό σε κάθε σημείο του πεδίου ροής ΑΒΓΔ

Β) Να υπολογίσετε τη διηθούμενη παροχή στο διαπερατό στρώμα.

Δίνονται: H_1= 8m, l=400m, b=70m,

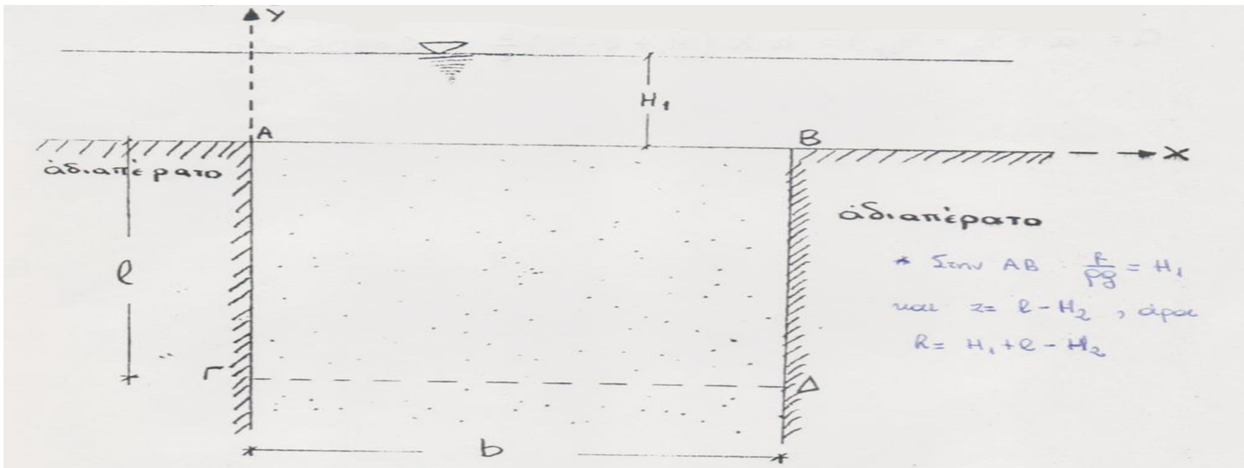
H_2=250m, α=μήκος διαπερατού στρώματος κατά την οριζόντια διεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο χ-ψ=2500m

Κ= συντελεστής σχετικής διαπερατότητας=10^{-5} m/sec.



Σχήμα 10: σχήμα άσκησης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (6/7)



Σχήμα 11: σχήμα άσκησης.

A) dΦ/dx=0 => $d^2Φ/dx^2$=0 (1)

dΦ/dy= -K (H1+l-H2)1/l => $d^2Φ/dy^2$=0 (2)

(1) και (2) => $d^2Φ/dx^2 + d^2Φ/dy^2$=0, άρα πληρούται η εξίσωση Laplace.

Αδιαπέρατα όρια ΑΓ, ΒΔ:

dΦ/dx=0, είναι η κάθετη στο όριο παράγωγος 0, όπως πρέπει.

Όριο δεξαμενής ΑΒ: y=0=>Φ= -K (H_1+l-H_2) (1-0/l) => Φ= -K (H_1+l-H_2), όπως πρέπει.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΟΜΟΙΩΜΑ– ΑΣΚΗΣΕΙΣ (7/7)

B) $Q=K\ (AB)\ \Delta h/l=K(ab)\ (H_1+l-H_2)/l=0{,}69125 m^3/s$.

Άλλος τρόπος:

$d\Phi/dy=\ d\Phi/dx=0 \Rightarrow \Psi=A(x)$ (3)

$d\Phi/dx=-\ d\Phi/dy=K\ (H_1+l-H_2)\ 1/l \Rightarrow \Psi=K\ (H_1+l-H_2)\ x/l+B(y)$ (4)

(3) και (4) => $\Psi=K\ (H_1+l-H_2)\ x/l+0$

Ορίζω για $x=0$, $\Psi_{A\Gamma}=0 \Rightarrow 0=0$.

$Q=\alpha\ (\Psi_{B\Delta}-\Psi_{A\Gamma})=\alpha K(H_1+l-H_2)b/l=0{,}69125 m^3/s$.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δημήτριος Τολίκας, Κωνσταντίνος Κατσιφαράκης, Νικόλαος Θεοδοσίου. «Υπόγεια Υδραυλική. Ενότητα 3. Εξίσωση συνέχειας-Μαθηματικό ομοίωμα.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS466/

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης
Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.