ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

3ο Μάθημα: Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Γεώργιος Μενεξές
Τμήμα Γεωπονίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

3ο Μάθημα

Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Η παρουσίαση βασίζεται σε υλικό από το έργο κυρίως των…

- Παπαδημητρίου, Γ. (2001). Περιγραφική Στατιστική. Θεσσαλονίκη: Παρατηρητής.
- Παπαδόπουλος, Γ. Σημειώσεις. Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής (www.aua.gr/gpapadopoulos)

Εισαγωγή (1)

- Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αποτελεί ανεξάρτητο κλάδο των **Μαθηματικών** με εφαρμογές στη Φυσική, στη Βιολογία, στη Γενετική, στην Κοινωνιολογία, στη Ψυχολογία, στην Οικονομία, στις Τηλεπικοινωνίες, στους Ηλ. Υπολογιστές κ.ά.
- Αντικείμενο της είναι η μελέτη των **μαθηματικών μοντέλων-υποδειγμάτων** με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να περιγράψουμε ένα **τυχαίο φαινόμενο**.
- Η Θεωρία Πιθανοτήτων διατυπώνει **λογικούς νόμους** που μπορούν να εφαρμοστούν σε καταστάσεις **τελείως τυχαίες**.

Εισαγωγή (ΙΙ)

- Τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: τα **προσδιοριστικά** (*deterministic*) και τα **στοχαστικά** (*stochastic*).
- Εάν οι συνέπειες οποιασδήποτε μεταβολής σε ένα σύστημα μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα και ακρίβεια τότε το μοντέλο ονομάζεται προσδιοριστικό.
- Εάν όμως οι μεταβολές στο σύστημα μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά μόνο με τη βοήθεια **τυχαίων μεταβλητών** τότε το μοντέλο ονομάζεται στοχαστικό.

Εισαγωγή (III)

- Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια στροφή των ερευνητών σε όλα σχεδόν τα επιστημονικά πεδία, προς τα στοχαστικά μοντέλα, αφού αυτά προσφέρουν καλύτερες δυνατότητες αναπαράστασης των φαινομένων, που στην πλειονότητά τους ενσωματώνουν τυχαία στοιχεία.

Εισαγωγή (IV)

- Η έννοια της πιθανότητας **διαφέρει** ποιοτικά από τις άλλες παραδοσιακές **μαθηματικές έννοιες** και η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται στην ίδια τη φύση της έννοιας σε σχέση με το επίπεδο της **διαισθητικής** της **αντίληψης**, στον τρόπο **υπολογισμού** της και στους **βασικούς νόμους** που αυτή υπακούει.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Τυχαία Φαινόμενα-Πειράματα Τύχης

- Ένα **φαινόμενο** λέγεται **τυχαίο**, όταν δεν είναι δυνατό να προβλεφθεί με βεβαιότητα το αποτέλεσμα κάθε παρατήρησης από μια σειρά επαναλήψεων του.
- **Πειράματα τύχης** ή απλά πειράματα στις πιθανότητες, ονομάζονται εκείνες οι πράξεις, οι οποίες όταν επαναλαμβάνονται κάτω από τις ίδιες ή παρόμοιες συνθήκες δεν οδηγούν πάντοτε στο ίδιο αποτέλεσμα και το οποίο δεν είναι δυνατό να προβλεφθεί με ακρίβεια.

Ορισμός: Τυχαίο Πείραμα

Τυχαίο Πείραμα είναι ο **στοχαστικός μηχανισμός** που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

[1] όλα τα δυνατά αποτελέσματά του είναι γνωστά εκ των προτέρων.

[2] σε κάθε συγκεκριμένη δοκιμή-επανάληψη το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων.

[3] (θεωρητικά) μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες…

- Οι συνθήκες του πειράματος παραμένουν οι ίδιες από πείραμα σε πείραμα για όλες τις δοκιμές-επαναλήψεις$\rightarrow$ **ταυτονομία ή ισονομία** (*identically distributed).*
- Η έκβαση μιας δοκιμής δεν επηρεάζει και δεν επηρεάζεται από την έκβαση άλλης δοκιμής $\rightarrow$ **ανεξαρτησία** (*independence).*

Παραδείγματα Πειραμάτων Τύχης

- Η ρίψη ενός νομίσματος.
- Το εισόδημα μιας οικογένειας, σε σχέση με μια τιμή.
- Το αποτέλεσμα ενός νόμου σε ένα κλάδο της βιομηχανίας.
- Οι κλιματικές συνθήκες στην Θεσσαλονίκη, μια φθινοπωρινή μέρα.
- Το αποτέλεσμα των εξετάσεων ενός φοιτητή στο μάθημα της στατιστικής, όταν εξετάζεται σ' αυτό για δεύτερη φορά.
- Η κατανάλωση βενζίνης, ένα Σαββατοκύριακο του Ιουλίου.

Το Τυχαίο Πείραμα οδηγεί σε Πιθανά Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα

Πείραμα	Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα
Ρίχνουμε ένα νόμισμα	Κορώνα, Γράμματα
Αποτελέσματα εξετάσεων	Βαθμοί: 0, 1, 2, ..., 10
Χρόνος συναρμολόγησης	t > 0 δευτερόλεπτα
Βαθμοί μαθημάτων (USA)	F, D, C, B, A, A+

Παρατηρήσεις

- Στη Θεωρία Πιθανοτήτων το τυχαίο πείραμα αναφέρεται σε μια **ιδεατή διαδικασία παραγωγής δεδομένων** και όχι στον τρόπο διεξαγωγής του πειράματος.
- Η Θεωρία των Πιθανοτήτων μας επιτρέπει όχι μόνο να ερμηνεύσουμε τα δεδομένα που προκύπτουν από την παρατήρηση ενός φαινομένου με σκοπό να αποκαλύψουμε τους γενικότερους νόμους, οι οποίοι θα είναι δυνατό να εφαρμοστούν σε άλλες σειρές παρατηρήσεων, που αφορούν όμως στο ίδιο φαινόμενο, αλλά και να αναπτυχθούν νέοι μέθοδοι μελέτης και αντιμετώπισης της **αοριστίας** και της **πολυπλοκότητας** που χαρακτηρίζουν τα **τυχαία φαινόμενα**.

Πιθανότητες και Στατιστική (1)

Η σπουδαιότερη εφαρμογή της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, μέσα στο πλαίσιο των Μαθηματικών, είναι η **Στατιστική**. Η Στατιστική είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μας επιτρέπει:

- **α)** να κάνουμε μια περιληπτική παρουσίαση των δεδομένων τα οποία έχουμε συλλέξει είτε από την άμεση παρατήρηση των μονάδων ενός δείγματος είτε από πειραματικές διατάξεις (Περιγραφική Στατιστική)

και

- **β)** να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με τα όσα γνωρίζουμε ή δε γνωρίζουμε για το γύρω μας κόσμο με βάση την ανάλυση των πιο πάνω δεδομένων.

Πιθανότητες και Στατιστική (2)

- Η Θεωρία των Πιθανοτήτων μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ένα **μέτρο της βεβαιότητας** για τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε από την εφαρμογή στατιστικών μεθόδων ανάλυσης και πρόβλεψης.
- Η Επαγωγική Στατιστική παρέχει τις μεθόδους εκείνες που μας επιτρέπουν να **γενικεύουμε δειγματοληπτικά συμπεράσματα**, δηλ. από τη μελέτη των στατιστικών παραμέτρων ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος να εξάγουμε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες παραμέτρους του πληθυσμού από τον οποίο έχει ληφθεί το δείγμα.

Πιθανότητες και Στατιστική (3)

- Στα προβλήματα της Εφαρμοσμένης Στατιστικής οι ακριβείς **πιθανότητες** πραγματοποίησης ενός φαινομένου ή εμφάνισης ενός χαρακτηριστικού είναι **άγνωστες** και θα πρέπει να τις υπολογίσουμε με βάσει τα **εμπειρικά-δειγματοληπτικά-πειραματικά δεδομένα**.

Δειγματικός Χώρος - Ενδεχόμενα

- Το σύνολο των **δυνατών αποτελεσμάτων (ενδεχομένων)** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος Ω (ή S)**.

- Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι, ο δειγματικός χώρος είναι: **Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}**
- Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα {Κεφαλή ή Γράμμα), τότε ο δειγματικός χώρος είναι: **Ω={Κ, Γ},**

  όπου:

  Κ αντιστοιχεί στην ένδειξη "Κεφαλή"

  και

  Γ στην ένδειξη "Γράμμα".

Είδη Συνόλων

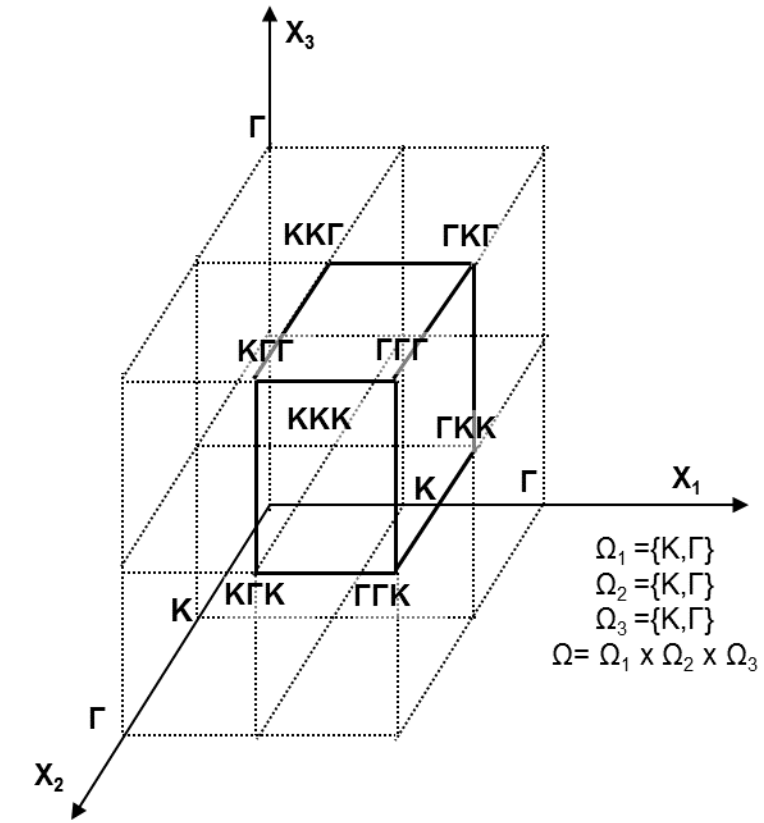
– **Πεπερασμένο** (*Finite*):
  S={H,T}

– **Άπειρο** (*Infinite*):
  S={(H), (HT), (HHT), (HHHT),….}, $\Re$, [a,b], $(-\infty,x]$

– **Απειραριθμήσιμο:** όταν ένα σύνολο είναι ισοδύναμο με το σύνολο Φυσικών Αριθμών

– **Αριθμήσιμο:** όταν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο ή απειραριθμήσιμο.

Γεωμετρική Αναπαράσταση Δειγματοχώρου



Δειγματικός χώρος ρίψης συγχρόνως τριών νομισμάτων

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001).

Αναλυτική Παράσταση Δειγματοχώρου

Αναγραφή

Ω=

{(Κ, Κ, Κ), (Κ, Κ, Γ), (Κ, Γ, Κ), (Κ, Γ, Γ),

(Γ, Κ, Κ), (Γ, Κ, Γ), (Γ, Γ, Κ) , (Γ, Γ, Γ)}

$$\boxed{\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2, x_3 \in \Omega_3\}}$$

Περιγραφή

Απλό Ενδεχόμενο

- **Απλό Ενδεχόμενο** είναι μια συλλογή των διαφόρων **στοιχειωδών εκβάσεων-αποτελεσμάτων** (*elementary outcomes*). ενός πειράματος τύχης.
- Είναι μια **"δήλωση"** σε σχέση με ένα τυχαίο πείραμα για την οποία το μόνο πράγμα που έχει σημασία είναι εάν σε μια συγκεκριμένη δοκιμή-επανάληψη **έχει συμβεί ή όχι**.

Παρατηρήσεις

– Το (σύνθετο) ενδεχόμενο είναι ένα υποσύνολο του Δειγματοχώρου **Ω**.

– Η στοιχειώδης έκβαση **s** (απλό ενδεχόμενο) είναι στοιχείο του **Ω**.

– Η στοιχειώδης έκβαση **s** είναι επίσης ενδεχόμενο αλλά όχι το αντίθετο.

– Παράδειγμα:

A={2, 4, 6}, B={2, 6}, C={4, (2,6)}

$$\boxed{B \subset A \ \text{αλλά}\ B \notin A; \ \text{όμως}\ B \in C}$$

Απλά, Σύνθετα, Βέβαια και Αδύνατα Ενδεχόμενα (1)

Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια.

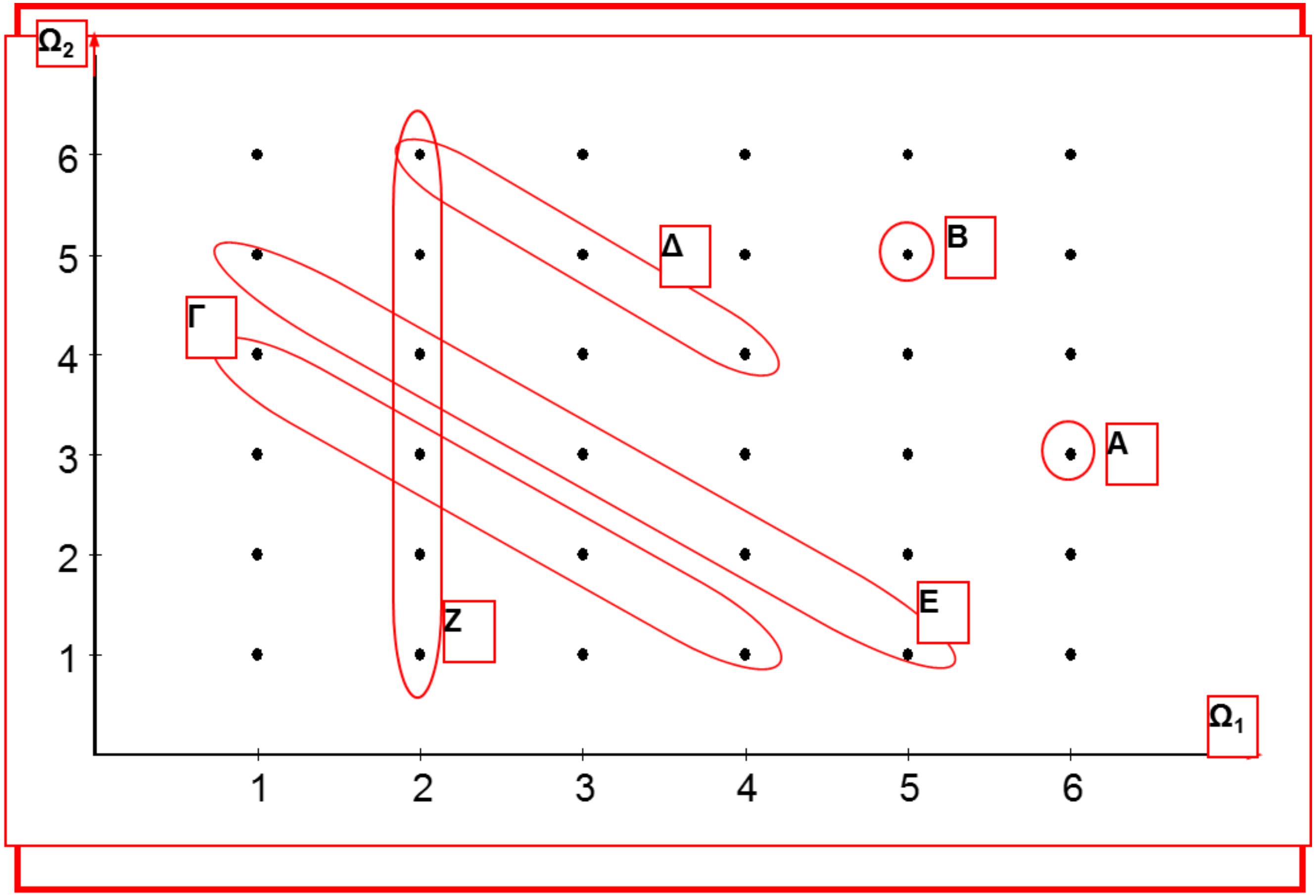
- A={(6, 3)}
- B={(5, 5)}
- $\Gamma=\{(\omega_1, \omega_2)/\omega_1+\omega_2=5\}$
- $\Delta=\{(\omega_1, \omega_2)/\omega_1+\omega_2=8$ και $\omega_1\leq 4\}$
- $E=\{(\omega_1, \omega_2)/\omega_1+\omega_2=6\}$
- $Z=\{(\omega_1, \omega_2)/\ \omega_2=2\}$

όταν $(\omega_1, \omega_2)\in \Omega$

Απλά Ενδεχόμενα

Σύνθετα Ενδεχόμενα

Απλά, Σύνθετα, Βέβαια και Αδύνατα Ενδεχόμενα (2)



Διάγραμμα *Euler*

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001).

Απλά, Σύνθετα, Βέβαια και Αδύνατα Ενδεχόμενα (3)

- **Βέβαιο Ενδεχόμενο:**

$$\boxed{H = \{(\omega_1, \omega_2) / \omega_1 + \omega_2 \leq 12\}}$$

- **Αδύνατο Ενδεχόμενο:**

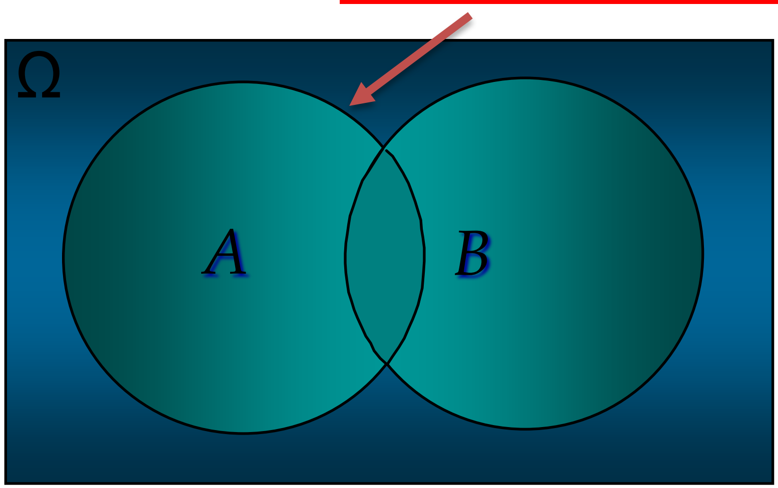
$$\boxed{H = \{(\omega_1, \omega_2)/\omega_1 + \omega_2 > 12\}}$$

Πράξεις με Ενδεχόμενα (1)

- **Ένωση ενδεχομένων**

Όταν επιθυμείται η πραγματοποίηση **τουλάχιστον ενός** από τα ενδεχόμενα **A** και **B,** τότε έχουμε το ενδεχόμενο **Γ**, που είναι η ένωση των δύο αυτών και συμβολίζεται: **Γ=A∪B.**

$$\boxed{A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}}$$



Η ένωση τριών ή περισσοτέρων ενδεχομένων ικανοποιεί τον προσεταιριστικό νόμο ή ιδιότητα:

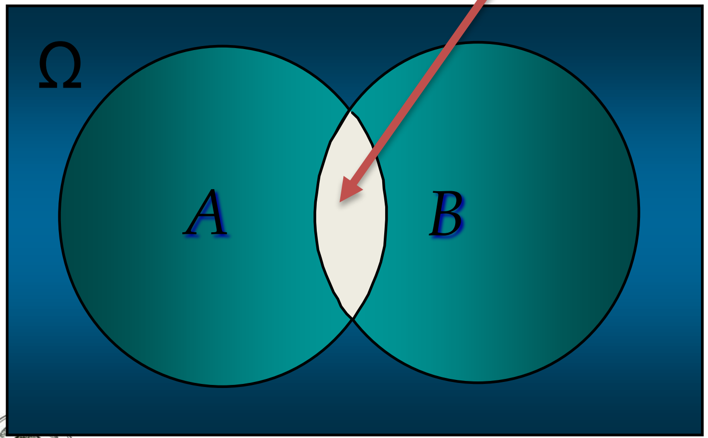
$$\boxed{(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{\Gamma}}$$

Πράξεις με Ενδεχόμενα (2)

- **Τομή ενδεχομένων ή γινόμενο:**

  Όταν επιθυμείται η πραγματοποίηση **συγχρόνως** και των **δύο ενδεχομένων Α** και **Β**, τότε έχουμε το ενδεχόμενο **Γ** που είναι η τομή ή το γινόμενο των δύο αυτών και συμβολίζεται: **Γ=Α∩Β ή Γ=ΑΒ.**

$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}}$$



Η τομή τριών ή περισσοτέρων ενδεχομένων ικανοποιεί τον προσεταιριστικό νόμο ή ιδιότητα:

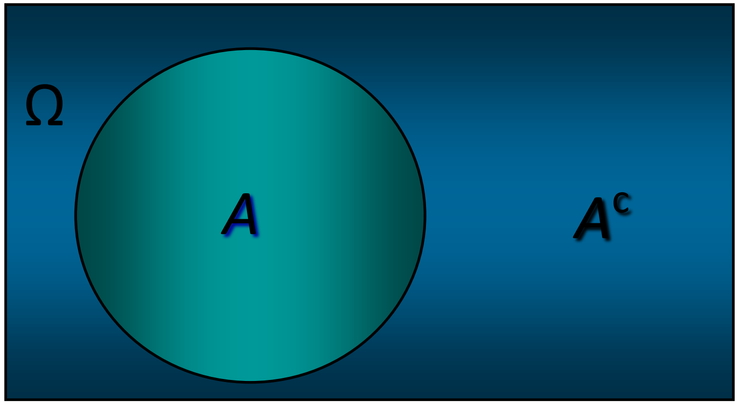
$$\boxed{(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{\Gamma}}$$

Πράξεις με Ενδεχόμενα (3)

- **Συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α**

Συμπληρωματικό ενδεχόμενο του **Α**, σ' ένα δειγματικό χώρο **Ω**, είναι εκείνο το ενδεχόμενο που περιέχει όλα τα **απλά ενδεχόμενα που δεν ανήκουν στο Α**. Συμβολίζεται με **Α'** ή **Αc** και σημαίνει πιο απλά ότι **το ενδεχόμενο Α δεν συμβαίνει.**

$$\boxed{A^c \text{ ή } A' = \{x : x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}}$$

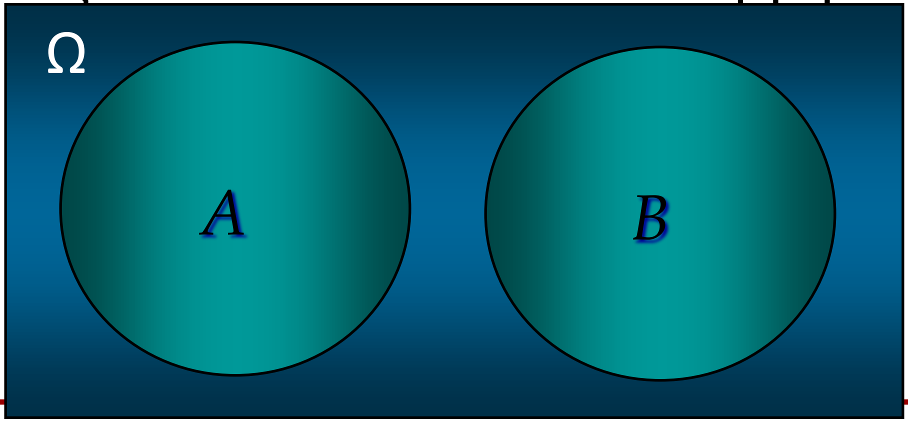


Πράξεις με Ενδεχόμενα (4)

- **Ξένα ή ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα**

Όταν δύο ενδεχόμενα **Α** και **Β** ενός δειγματικού χώρου **Ω** δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, τότε κανένα σημείο του **Ω** δεν υπάρχει που να ανήκει συγχρόνως στο **Α** και στο **Β** και η τομή τους **Α**$\cap$**Β** παριστά το κενό σύνολο $\varnothing$. Σε αυτήν την περίπτωση τα ενδεχόμενα **Α** και **Β** ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους** ή **ασυμβίβαστα**.

Είναι προφανές ότι τα **Α** και **Α'** είναι ασυμβίβαστα.



Παράδειγμα 1

- Ρίχνουμε ένα ζάρι, δηλαδή έχουμε τον δειγματικό χώρο **Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}** και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
  - Α={1, 3, 5)
  - Β={2, 4, 6}
  - Γ={1, 3}
  - Δ={4, 6}
  - Ε={1, 2, 3}
  - Ζ={2}
  - Η={1, 3, 4, 5, 6}

Παράδειγμα 1 (*συνέχεια*)

$A \cap B = \varnothing$	**Τα ενδεχόμενα Α και β είναι συμπληρωματικά και είναι αδύνατον να πραγματοποιηθούν συγχρόνως.**
$A \cap \Delta = \varnothing$	**Τα ενδεχόμενα Α και Δ είναι ξένα μεταξύ τους (ασυμβίβαστα) και δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως.**
$B \cap E = Z = \{2\}$	**Όταν πραγματοποιείται το Ζ, πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Β και Ε.**
$A \cup \Delta = H$	**Το ενδεχόμενο Η είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί όταν πραγματοποιείται το Α ή το Δ.**
$A \cup B = B \cup A = \Omega$	**Αυτό σημαίνει ότι εκτελώντας το πείραμα, ρίχνοντας δηλαδή το ζάρι, θα πραγματοποιηθεί οπωσδήποτε το Α ή το Β.**

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001)

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

- Ισότητα

$$\boxed{A \subset B \text{ και } B \subset A \text{ τότε } A = B}$$

- Διαφορά

$$\boxed{A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}}$$

- Χρήσιμα αποτελέσματα (*de Morgan*)

$$\boxed{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c} \qquad \boxed{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c}$$

“Προσκόλληση”- Ανάθεση Πιθανοτήτων

- **Κλασσική Προσέγγιση - *Classical Approach:***
  Προσκολλούμε-συνδέουμε πιθανότητες βάσει της υπόθεσης ότι οι εκβάσεις-αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι εξίσου πιθανές.
- **Προσέγγιση Συχνότητας - Frequency Approach:**

  Προσκολλούμε-συνδέουμε πιθανότητες βάσει της σταθερότητας των εμπειρικών συχνοτήτων εμφάνισης ενός αποτελέσματος (από πειράματα ή ιστορικά στοιχεία).
- **Η υποκειμενική προσέγγιση - Bayesian (Subjective) Approach:**

  Προσκολλούμε-συνδέουμε πιθανότητες βάσει πεποιθήσεων-πιστεύω-προηγούμενης εμπειρίας-διαίσθησης.
- **Η αξιωματική προσέγγιση - Axiomatic Approach:**

  Η έννοια της πιθανότητας ορίζεται σε αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο. Η αξιωματική προσέγγιση βασίζεται σε ένα σύνολο αξιωμάτων.

Ορισμοί της Πιθανότητας: Κλασσικός (Laplace, 1812)

- Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχόμενου ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων-εκβάσεων προς το σύνολο των δυνατών περιπτώσεων. Θεωρούμε ότι όλες οι περιπτώσεις είναι **“εξίσου πιθανές”**.

- Αν θεωρηθεί **N(E)** το πλήθος των σημείων του δειγματικού χώρου **Ω** που αποτελούν το ενδεχόμενο **E**, δηλαδή οι ευνοϊκές περιπτώσεις, και **N(Ω)** το πλήθος του συνόλου των σημείων του δειγματικού χώρου **Ω**, δηλαδή οι δυνατές περιπτώσεις, τότε:

$$\boxed{P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)}}$$

Κλασσικός Ορισμός

- Πλεονεκτήματα:
    - Ο κλασσικός ορισμός είναι εύκολος.
- Μειονεκτήματα:
    - Μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο όταν υπάρχει **πεπερασμένος** αριθμός στοιχείων πιθανών εκβάσεων.
    - Η συνθήκη **“εξίσου πιθανές”** (‘*equally likely*’) κάνει τον ορισμό συμμετρικό (*symmetric*).

Πώς αυτός ο ορισμός μπορεί να εφαρμοσθεί στην περίπτωση μεροληπτικού νομίσματος;

Ισοπίθανα Στοιχεία-Ενδεχόμενα

- Αν ο δειγματικός χώρος **Ω** περιέχει **Ν** στοιχεία καθένα των οποίων έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, τότε κάθε στοιχείο έχει πιθανότητα επιλογής ίση με **1/Ν.**

Ορισμοί της Πιθανότητας: Εμπειρικός ή Στατιστικός (Von Mises, 1919)

Έστω ότι επαναλαμβάνουμε **ν** φορές ένα πείραμα Π, και ότι το ενδεχόμενο **Ε** του πειράματος εμφανίζεται συνολικά **μ** φορές. Ο αριθμός **μ** δεν μπορεί, προφανώς, να είναι μηδενικός, αλλά ούτε και πεπερασμένος όταν το **ν** αυξάνει.

Ο αριθμός **μ** εκφράζει τις επαναλήψεις του ενδεχομένου Ε και ο λόγος **μ/ν** τη συχνότητα αυτού σε **ν** επαναλήψεις του πειράματος Π.

Πιθανότητα = Όριο της σχετικής συχνότητας όταν οι επαναλήψεις τείνουν στο άπειρο

$$P(E) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\mu(E)}{\nu}$$

Παράδειγμα 2

- Ρίξιμο ενός ζαριού

  Η P(2,4,6) = ½ όχι γιατί υπάρχουν δύο ισοπίθανες εκβάσεις αλλά γιατί ένας μεγάλος αριθμός επαναλαμβανόμενων δοκιμών-επαναλήψεων καταδεικνύει ότι η εμπειρική συχνότητα του ενδεχόμενου συγκλίνει στο ½ .

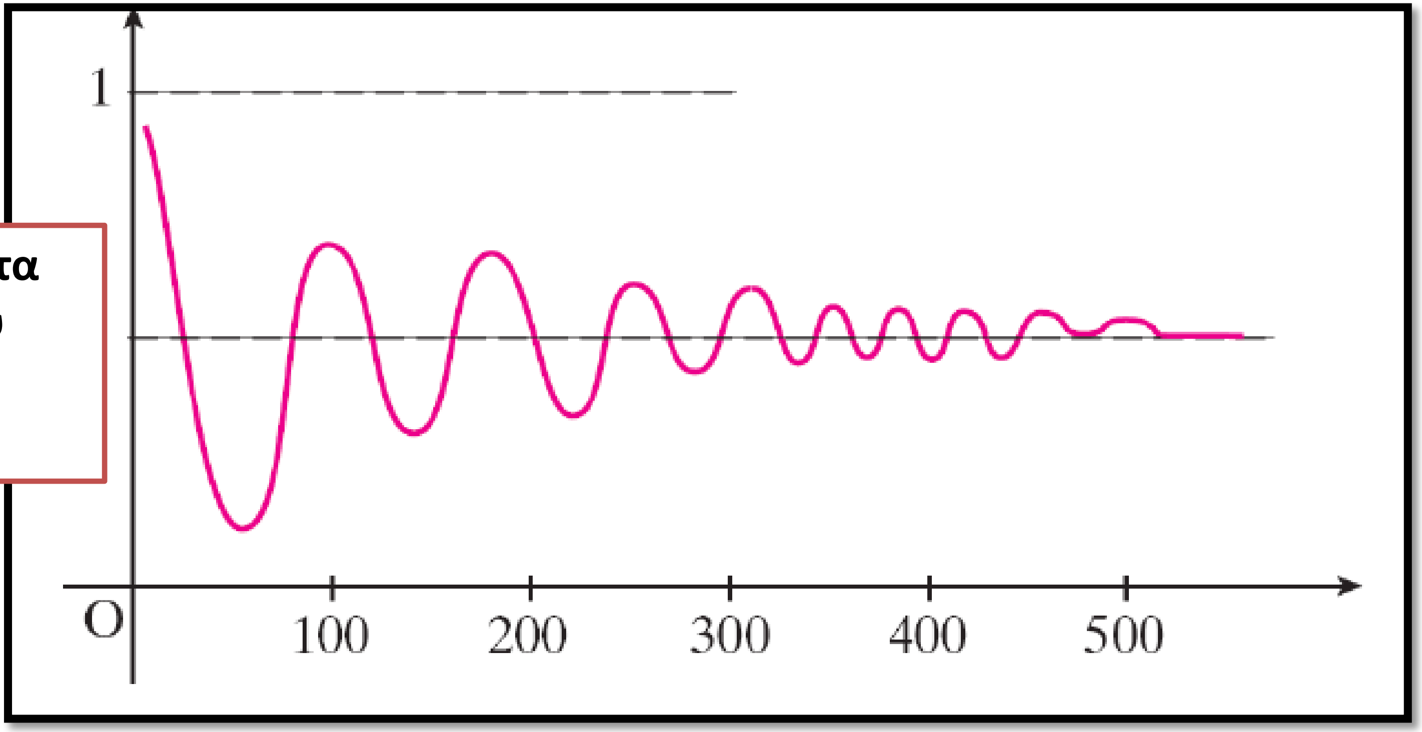
Εμπειρικός Ορισμός

- **Πλεονεκτήματα:**
  - Η προσέγγιση της συχνότητας είναι **διαισθητική**.
- **Μειονεκτήματα:**
  - Δεν υπάρχει προφανής απάντηση στο ερώτημα των άπειρων δοκιμών-επαναλήψεων.
  - Τα πλείστα πραγματικά στοιχεία δεν αποτελούν επαναλαμβανόμενες δοκιμές τυχαίου πειράματος.

Σχετική Συχνότητα

- Η σχετική συχνότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα ποσοτικό μέτρο έκφρασης του βαθμού βεβαιότητας για την εμφάνιση ενός ενδεχομένου.
- Όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται πάρα πολλές φορές, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από κάποια τιμή που καλείται **οριακή σχετική συχνότητα** και εκφράζει ένα μέτρο του βαθμού βεβαιότητας για την εμφάνιση του ενδεχομένου.

Νόμος της Στατιστικής Ομαλότητας



Σχετική Συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου “Κεφαλή»

Αρ. Επαναλήψεων

Πηγή: Παπαδόπουλος, Γ. (…)

Στατιστική Ομαλότητα (1)

- Έστω ότι ρίχνουμε ένα κανονικό-αμερόληπτο νόμισμα. Το αποτέλεσμα σε κάθε εκτέλεση του πειράματος είναι Κεφάλι (Κ) ή Γράμματα (Γ).
- Εάν συνεχίσουμε να ρίχνουμε το νόμισμα πολλές φορές διαπιστώνουμε ότι η κάθε μία πλευρά εμφανίζεται ίσες περίπου φορές με την άλλη.
- Αν Ν είναι ο συνολικός αριθμός των ρίψεων και $\mathbf{N_H}$ ο αριθμός των ρίψεων στις οποίες εμφανίστηκε το ενδεχόμενο Κ και παραστήσουμε τα σημεία $\mathbf{A_N=\{N, N_H/N\}}$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy θα διαπιστώσουμε, ότι μετά από μια αρχική ταλάντευση το σημείο $\mathbf{A_N}$ θα κινείται πάνω στην ευθεία $\mathbf{y=1/2}$.

Στατιστική Ομαλότητα (2)

- Δηλαδή, η **σχετική συχνότητα** εμφάνισης του ενδεχομένου **Κ** θα σταθεροποιηθεί γύρω από την τιμή **0,5**.
- Αυτό επιβεβαιώνει την προσδοκία μας ότι κατά την ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων Κ και Γ είναι ίσες.
- Άρα, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων ή των δοκιμών του πειράματος αυξάνει απεριόριστα.

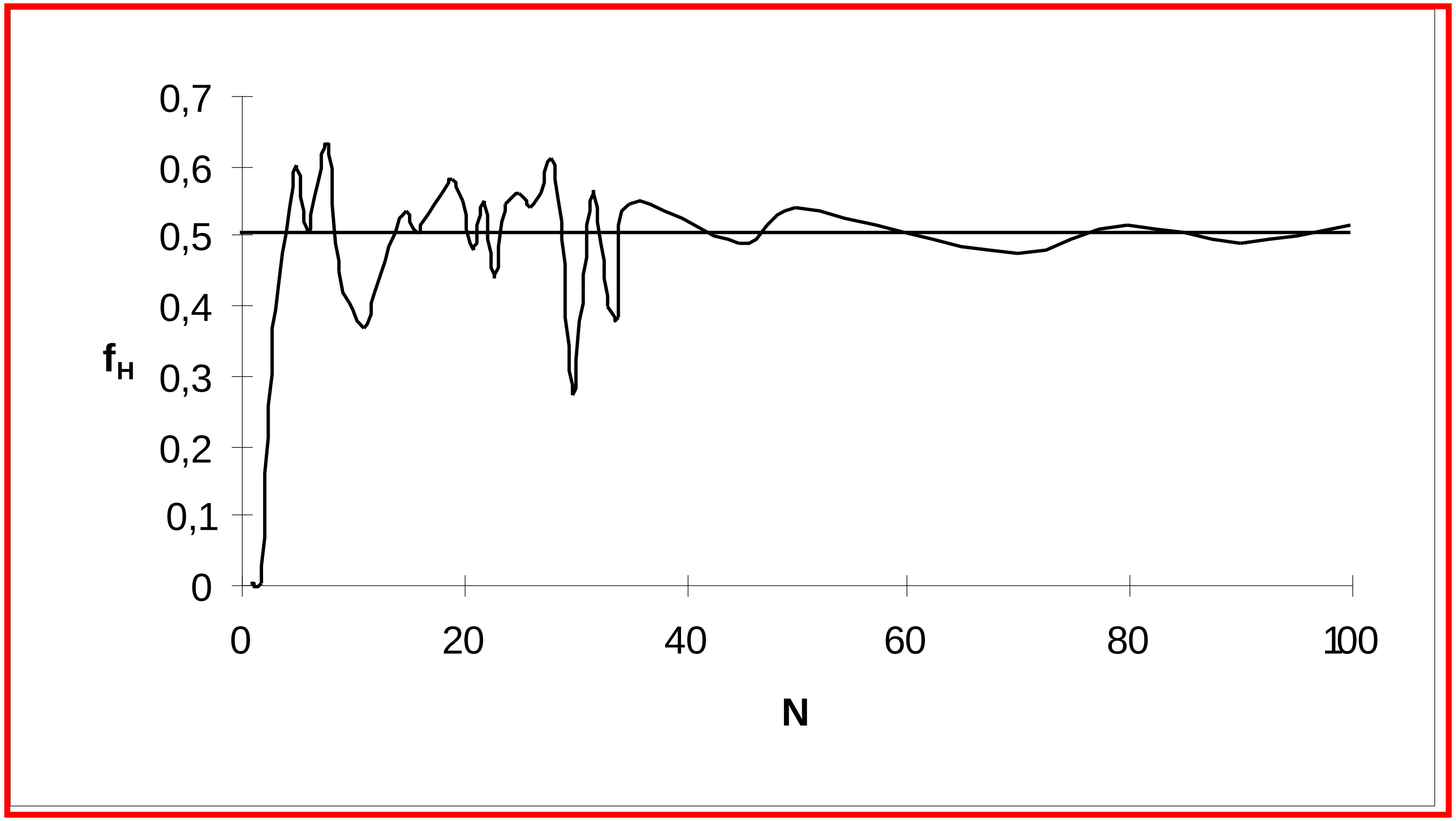
Στατιστική Ομαλότητα (3)

- Αυτή η συγκεκριμένη αριθμητική τιμή, στην **πράξη** λαμβάνεται ως η **πιθανότητα** εμφάνισης του ενδεχομένου.
- Η **στατιστική ομαλότητα** αποτελεί την εμπειρική βάση της στατιστικής θεωρίας και πρακτικής.

Προσομοίωση

Number of trials	Number of Heads	Relative frequence	Number of trials	Number of Heads	Relative frequence
N	N_H	$f_H=N_H/N$	N	N_H	$f_H=N_H/N$
1	0	0	22	12	0,545455
2	0	0	23	10	0,434783
3	1	0,333333	24	13	0,541667
4	2	0,5	25	14	0,56
5	3	0,6	26	14	0,538462
6	3	0,5	27	15	0,555556
7	4	0,571429	28	17	0,607143
8	5	0,625	29	15	0,517241
9	4	0,444444	30	8	0,266667
10	4	0,4	31	13	0,419355
11	4	0,363636	32	18	0,5625
12	5	0,416667	33	13	0,393939
13	6	0,461538	34	13	0,382353
14	7	0,5	35	19	0,542857
15	8	0,533333	45	22	0,488889
16	8	0,5	50	27	0,54
17	9	0,529412	60	30	0,5
18	10	0,555556	70	33	0,471429
19	11	0,578947	80	41	0,5125
20	11	0,55	90	44	0,488889
21	10	0,47619	100	51	0,51

Στατιστική Ομαλότητα



Παράδειγμα 3: Στην Πράξη

- Μία εταιρία που πουλάει Η/Υ καταγράφει των αριθμό των υπολογιστών που πωλούνται σε ένα μήνα (30 μέρες):

Αρ. Η/Υ που πωλούνται σε μία μέρα	Σε πόσες ημέρες
0	1
1	2
2	10
3	12
4	5

Στην Πράξη (*συνέχεια*)

Αρ. Η/Υ που πωλούνται σε μία μέρα	Σε πόσες ημέρες	Σχετική συχνότητα
0	1	1/30 = 0,03
1	2	2/30 = 0,07
2	10	10/30 = 0,33
3	12	12/30 = 0,40
4	5	5/30 = 0,17
		$\sum = 1{,}00$

«Υπάρχει 40% πιθανότητα η εταιρία να πουλήσει 3 Η/Υ σε μία συγκεκριμένη ημέρα»

Ορισμοί της Πιθανότητας: Αξιωματικός (*Kolmogorov,* 1933)

- Έστω δειγματοχώρος **Ω**. Σε κάθε ενδεχόμενο-συμβάν **A_i** του **Ω** αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό **$P(A_i)$**, ο οποίος ονομάζεται Πιθανότητα πραγματοποίησης του **A_i**, εφόσον υπακούει στα παρακάτω αξιώματα:
  - **$P(\Omega)=1$**
  - **$P(A_i)\geq 0$**
  - **$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$**
    όπου τα **Ai** είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα-γεγονότα.

Θεώρημα

1. $P(A)+P(A^c)=1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $P(\varnothing)=0$
4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
5. Αν $A \subset B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
6. $$\boxed{P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)}$$

Αξιωματικός Ορισμός (*συνέχεια*)

- Η αξιωματική προσέγγιση ξεκινά από ένα σύνολο αξιωμάτων χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα χωρίς οποιαδήποτε προβλήματα όπως με τους προηγούμενους ορισμούς.
- Είναι πλήρης (*complete*), μη-πλεονάζων (*non-redundant*) και συνεπής (*consistent*).
- Η Πιθανότητα (*Probability*) P(.) ορίζεται ως μια **συνάρτηση** από το χώρο ενδεχομένων στο υποσύνολο των **πραγματικών** αριθμών μεταξύ **0** και **1**.

Χρήσιμα Συμπεράσματα (1)

- **Πιθανότητα συμπληρώματος**

  Έστω Α είναι ένα ενδεχόμενο και A^c το συμπληρωματικό του.
  Δεδομένου ότι $\mathbf{A^c \cup A = \Omega}$, τότε:

$$\mathbf{P(A^c)=1-P(A)}$$

- **Προσθετικός Νόμος-Κανόνας-Ιδιότητα**

  Ο Προσθετικός Νόμος μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη πιθανότητα του ενδεχομένου Α, ή Β, ή και των δύο Α και Β.

  $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Χρήσιμα Συμπεράσματα (2)

- Ένα ενδεχόμενο **Ε** είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου **Ω**
- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου **Ε** ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των **κ** απλών στοιχείων του ενδεχόμενου:

$$\boxed{P(E) = \sum_{i=1}^{\kappa} P(\varepsilon_i)}$$

Βασικές Ιδιότητες Πιθανοτήτων

1. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα αδύνατο ενδεχόμενο είναι μηδέν.
$$\mathbf{P(\varnothing) = 0}$$
2. Για κάθε ζευγάρι ενδεχομένων A και B με $A \subseteq B$ έχουμε:
$$\mathbf{A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$$
3. Για κάθε ζευγάρι μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων A και B έχουμε:
$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Στα **μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα** A και B ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{A, B\ \text{ασυμβίβαστα}\ , \Rightarrow P(A \cup B) < P(A) + P(B)}$$

Η οποία και γίνεται ισότητα για ενδεχόμενα ασυμβίβαστα. Γενικά λοιπόν έχουμε την σχέση:

$$\mathbf{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$$

γνωστή ως ανισότητα του Boole.

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001)

Το Θεώρημα των Σύνθετων Πιθανοτήτων (1)

- Έστω δύο πειράματα Π1 και Π2 που μπορούν να θεωρηθούν **ανεξάρτητα** μεταξύ τους
- Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: **Α1** στο πείραμα Π1 και **Α2** στο Π2. Έστω επίσης **P(A1)** και **P(A2)** οι αντίστοιχες πιθανότητες τους. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα στα πειράματα Π1 και Π2 συμβολίζεται με:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2)}$$

και είναι ίση με: $\boxed{\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}}$

Το Θεώρημα των Σύνθετων Πιθανοτήτων (2)

- Έστω δύο πειράματα Π1 και Π2 που δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους.
- Ας υποθέσουμε τώρα, ότι τα δύο ενδεχόμενα A_1 και A_2 δεν είναι ανεξάρτητα και ότι η πραγματοποίηση του ενός επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου καθώς και αντίστροφα.
- Στην περίπτωση αυτή προσδιορίζουμε την πιθανότητα να συμβεί το A_2, εφόσον συνέβη το A_1, που συμβολίζουμε με $P(A_2/A_1)$ ή την πιθανότητα να συμβεί το A_1, εφόσον συνέβη το A_2, $P(A_1/A_2)$ και έχουμε:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1/A_2)}$$

Πιθανότητες υπό Συνθήκη-Δεσμευμένες Πιθανότητες

$$P(A_1/A_2) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A_2)}$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο **A_2**, υπό την προϋπόθεση ότι έχει πραγματοποιηθεί το **A_1**, είναι ίση με τον λόγο της πιθανότητας να πραγματοποιηθούν τα **A_1**, **A_2** συγχρόνως, προς **την** πιθανότητα πραγματοποίησης του **A_1**.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου δεδομένου ότι ένα άλλο ενδεχόμενο έχει ήδη πραγματοποιηθεί-συμβεί ορίζεται ως δεσμευμένη πιθανότητα (*conditional probability*).
- Η δεσμευμένη πιθανότητα του **A** δεδομένου του **B** συμβολίζεται με **P(A|B).**
- Η δεσμευμένη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$$

- Ο πολλαπλασιαστικός νόμος ή κανόνας παρέχει ένα τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας της τομής δύο ενδεχομένων:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$$

Παρατήρηση

Παρατήρηση:

Αν $A \subseteq B$ τότε: $P(A/B) = P(A)/P(B)$

$$\left.\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ A \subseteq B &\Rightarrow A \cap B = A \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001)

Παράδειγμα 4

- Να βρεθεί η πιθανότητα να έρθει σε μια ρίψη ζαριού αποτέλεσμα μικρότερο του **4**, εάν α) δε δίνεται άλλη πληροφορία, β) είναι γνωστό ότι ή ρίψη έδωσε περιττό αριθμό.

Λύση:

α) Έστω **B** το ενδεχόμενο «ένδειξη μικρότερη του **4**». Τότε:

P(B)=P(1)+P(2)+P(3)=1/6 + 1/6 + 1/6 =1/2

β) Έστω **A** το ενδεχόμενο «περιττός αριθμός». Τότε:

P(A)=3/6 =1/2 και P(A$\cap$B)=2/6 = 1/3. Συνεπώς:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}}$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα (1)

Ορισμός: **Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β με $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 0$, λέμε ότι το ενδεχόμενο Α είναι ανεξάρτητο του Β όταν:**

$$\mathbf{P(A/B)=P(A)}$$

Επειδή όμως: $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

έχουμε: $$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Η τελευταία σχέση, είναι και η πιο γνωστή σχέση που συνδέει δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα, αυτή δε γενικεύεται για ένα πεπερασμένο σύνολο ανεξάρτητων ενδεχομένων.

Αν για τα ενδεχόμενα A_1, A_2, …, A_n με πιθανότητες διάφορες του μηδενός, $P(A_1) \neq 0, P(A_2) \neq 0, \ldots, P(A_n) \neq 0$ ισχύει η:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)}$$

τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα.

Δηλαδή για να διαπιστωθεί ότι ένα πλήθος ενδεχομένων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί να διαπιστώσουμε ότι η πιθανότητα της τομής τους είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001)

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα (2)

Όταν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, τότε οι πληροφορίες που έχουν σχέση με το ένα δεν ασκούν καμιά επίδραση στο άλλο

Παρατήρηση:
Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με πιθανότητες διάφορες από το μηδέν δεν είναι ανεξάρτητα.
Όταν τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \varnothing$ και $P(A \cap B)=0$, αν είναι και ανεξάρτητα: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Οδηγούμαστε στη σχέση $P(A) \cdot P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ή $P(B)=0$, που είναι αντίθετο από την αρχική υπόθεση.

Πηγή: Παπαδημητρίου (2001)

Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Έστω E={το πρώτο ζάρι 5}, F={άθροισμα 7}, και G={άθροισμα 10}

1. Δείξτε ότι **P(F|E)=P(F)**
2. Δείξτε **P(G|E)≠P(G)**
3. Αν πρόκειται να στοιχηματίσετε κατά πόσο το άθροισμα των ζαριών θα δείξει 10, θα σας βοηθούσε αν ξέρατε ότι το πρώτο ζάρι είναι 5; Τι συμβαίνει αν πρόκειται να στοιχηματίσετε κατά πόσο το άθροισμα των ζαριών θα δείξει 7?

Παράδειγμα 5 (*συνέχεια*)

(1, 1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,5)	(6,5)	(6,6)

Παράδειγμα 5 (*συνέχεια*)

- $P(F)=P(\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,3\}, \{5,2\}, \{6,1\})=6/36=1/6$
- $P(E)=6/36=1/6$
- $P(F|E)= P(F \cap E)/ P(E)$
- $P(F \cap E)=P(\{5,2\})=1/36$

Άρα $P(F|E)= P(F \cap E)/ P(E)=(1/36)/(1/6)=1/6=P(F)$

- $P(G)=P(\{6,4\}, \{5,5\}, \{4,6\})=3/36=1/12$
- $P(G \cap E)=P(\{5,5\})= 1/36$
- $P(G|E)= P(G \cap E)/ P(E)=(1/36)/(1/6)=1/6\neq P(G)$

Στοιχεία Συνδυαστικής

Στοιχεία Συνδυαστικής

- Αν κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου

  α) η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωρισθεί σε **κ** διαφορετικά βήματα τα οποία πρέπει να εκτελεστούν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και

  β) το πλήθος των δυνατών επιλογών σε κάθε βήμα είναι πλήρως καθορισμένο όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων βημάτων, τότε η απαρίθμηση μπορεί να γίνει με χρήση της **πολλαπλασιαστικής αρχής.**

Πολλαπλασιαστική Αρχή

«Αν το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του α_1, το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, …, και για κάθε επιλογή των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, το στοιχείο α_κ μπορεί να επιλεγεί με ν_κ διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά, κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_\kappa$ τρόπους.»

Πηγή: Παπαδόπουλος, Γ. (…)

Διατάξεις, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί

- Οι σχηματισμοί που προκύπτουν με την επιλογή ***k*** στοιχείων από ένα σύνολο *ν* στοιχείων **($1\leq k\leq \nu$)** ονομάζονται ***διατάξεις*** των ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** αν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής τους ή ***συνδυασμοί*** των *ν* στοιχείων ανά ***k*** αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής τους. Οι διατάξεις των *ν* στοιχείων ανά *ν* ονομάζονται ***μεταθέσεις*** των *ν* στοιχείων.

Παράδειγμα 14

- Οι **συνδυασμοί** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* ανά 3 είναι:

  {α, β, γ}, {α, β, δ}, {α, γ, δ}, {β, γ, δ}.

- Οι **διατάξεις** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* ανά 3 είναι:

  {α, β, γ}, {α, γ ,β}, {β, α, γ}, {β, γ ,α}, {γ, α, β}, {γ, β, α}, {α, β, δ}, {α, δ, β}, {β, α, δ}, {β, δ, α}, {δ, α, β}, {δ, β, α}, {α, γ, δ}, {α, δ, γ}, {γ, α, δ}, {γ, δ, α}, {δ, α, γ}, {δ, γ, α}, {β, γ, δ}, {β, δ, γ}, {γ, β, δ}, {γ, δ, β}, {δ, β, γ}, {δ, γ, β}.

- Οι **μεταθέσεις** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* είναι:

  {α, β, γ, δ}, {β, γ, δ, α}, {γ, δ, α, β}, {δ, α, β, γ}, {α, β, δ, γ}, {α, δ, γ, β}, {α, γ, δ, β,}, {α, γ, β, δ}, {γ, β, α, δ}, {γ, α, β, δ}, {γ, α, δ, β}, {δ, α, γ, β}, {β, α, γ, δ}, {β, α, δ, γ} {δ, β, α, γ}, {δ, β, γ, α}, {δ, γ, β, α}, {δ, γ, α, β}, {γ, δ, β, α}, {γ, β, δ, α}, {α, δ, β, γ}, {β, γ, α, δ}, {β, δ, γ, α}, {β, δ, α, γ}.

Υπολογισμοί

- Αριθμός Διατάξεων

$$\boxed{\Delta_k^{\nu} = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot \ldots \cdot (\nu - k + 1) = \frac{\nu!}{(\nu - k)!}}$$

- Αριθμός Συνδυασμών

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k! \cdot (\nu - k)!}}$$

- Αριθμός Μεταθέσεων=$\boldsymbol{k}$**!**

Επαναληπτικές διατάξεις *ν* στοιχείων ανά *k*

Για παράδειγμα, οι στήλες ΠΡΟΠΟ είναι επαναληπτικές διατάξεις των τριών ($\nu = 3$) συμβόλων 1, X, 2 ανά δεκατρία ($k = 13$). Δηλαδή, διατεταγμένες 13-άδες που δημιουργούνται από τα τρία σύμβολα 1, X, 2 τα οποία μπορούν να επαναλαμβάνονται (μέχρι και 13 φορές το καθένα). Επομένως, μπορούν να δημιουργηθούν $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots . \cdot 3}_{13} = 3^{13}$ διαφορετικές στήλες ΠΡΟΠΟ των δεκατριών αγώνων.

Πηγή: Παπαδόπουλος, Γ. (…)

Μεταθέσεις *k* ειδών στοιχείων

- Αν *r* στοιχεία δεν είναι διαφορετικά αλλά ταξινομούνται σε *k* διαφορετικά είδη με r_1 από αυτά όμοια μεταξύ τους (πρώτο είδος), r_2 από αυτά όμοια μεταξύ τους (δεύτερο είδος), …. και r_k από αυτά όμοια μεταξύ τους (*k* είδος), τότε ο αριθμός των **διαφορετικών** μεταθέσεων των *r* στοιχείων είναι ίσος με:

$$\boxed{\frac{r!}{r_1!\cdot r_2!\cdot\ldots\cdot r_k!}}$$

- Οι **διαφορετικές** μεταθέσεις των 4 γραμμάτων της λέξης ΑΛΛΟ είναι, ΑΛΛΟ, ΑΛΟΛ, ΛΑΛΟ, ΛΑΟΛ, ΟΑΛΛ, ΛΛΑΟ, ΛΛΟΑ, ΑΟΛΛ, ΛΟΑΛ, ΛΟΛΑ, ΟΛΛΑ, ΟΛΑΛ, δηλαδή, 12 συνολικά και όχι 4!=24

$$\boxed{\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}=12}$$

Παραδείγματα

Τα Γενέθλια (1)

Ανάμεσα σε **23** άτομα, η πιθανότητα να μην υπάρχουν δυο που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι μικρότερη από **0,50 (50% ή 50-50).**

ή ισοδύναμα

Η πιθανότητα δυο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι μεγαλύτερη ή ίση από **0,50 (50% ή 50-50).**

Τα Γενέθλια (2)

- Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από $\mathbf{366^{23}}$ ενδεχόμενα που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές κατανομές γενεθλίων των **23** ατόμων.
- Υποθέτουμε ότι αυτές οι κατανομές είναι ισοπίθανες.

Τα Γενέθλια (3)

- Από τα **366^{23}** ενδεχόμενα, υπάρχουν **366!/(366-23)!** κατανομές γενεθλίων στις οποίες και τα **23** άτομα έχουν διαφορετικές ημερομηνίες γεννήσεως.

- Έτσι η πιθανότητα να μην υπάρχουν δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι:

$$\mathbf{(366!/(366-23)!)\ /\ 366^{23} = 0{,}494}$$

Η Συνέντευξη (1)

Οκτώ φοιτητές περιμένουν για μια συνέντευξη σε αίθουσα αναμονής. Έστω ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς το πλήθος των φοιτητών σε κάθε έτος.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς δύο πρωτοετείς, δύο δευτεροετείς, δύο τριτοετείς και δύο τεταρτοετείς στην αναμονή.

Η Συνέντευξη (2)

- Ο 1^{ος} φοιτητής μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε από τα 4 έτη, ομοίως ο 2^{ος}, ο 3^{ος} κ.ο.κ.

- Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από $\mathbf{4^8}$ ενδεχόμενα-σημεία, τα οποία αντιστοιχούν σε όλους τους συνδυασμούς από έτη στα οποία μπορεί να βρίσκονται οι φοιτητές.

- Έστω ότι οι $\mathbf{4^8}$ συνδυασμοί έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης.

Η Συνέντευξη (3)

- Υπάρχουν **8!/2!2!2!2!** δείγματα που αντιστοιχούν στην περίπτωση στην οποία υπάρχουν δύο φοιτητές από κάθε έτος.

- Επομένως η πιθανότητα είναι:

$$\mathbf{8!/\,(2!2!2!2!4^{8}) = 0{,}0385}$$

Πρόβλημα Επιδημιολογίας (1)

- Από 100.000 ανθρώπους, οι 51.500 είναι γυναίκες και οι 48.500 είναι άνδρες. Από τις γυναίκες 9.000 έχουν το πρόβλημα υγείας ***«φ»*** και από τους άνδρες 30.200 έχουν το ίδιο πρόβλημα. Έστω ότι επιλέγουμε ένα άτομο **τυχαία.**

Πρόβλημα Επιδημιολογίας (2)

- Έχουμε **Ω={*γφ, γμ, αφ, αμ*}** ως δειγματικό χώρο με το ***γφ*** να σημαίνει γυναίκα με πρόβλημα υγείας, το ***γμ*** γυναίκα χωρίς πρόβλημα, το ***αφ*** άνδρας με πρόβλημα υγείας και το ***αμ*** άνδρας χωρίς πρόβλημα υγείας.

$\Rightarrow$ P***(γφ)*** = 0,090

P***(γμ)*** = 0,425

P***(αφ)*** = 0,302

P***(αμ)*** = 0,183

Πρόβλημα Επιδημιολογίας (3)

Έστω **Α** το ενδεχόμενο της επιλογής ενός ανθρώπου με πρόβλημα υγείας και έστω **Β** το ενδεχόμενο επιλογής γυναίκας.

- το **Α**$\cap$**Β** είναι το ενδεχόμενο επιλογής μιας γυναίκας με πρόβλημα υγείας,
- το **Α**$\cup$**Β** είναι το ενδεχόμενο επιλογής ενός ανθρώπου με πρόβλημα υγείας ή γυναίκας,
- το **Β-Α** είναι το ενδεχόμενο επιλογής μια γυναίκας χωρίς πρόβλημα υγείας.

Πρόβλημα Επιδημιολογίας (4)

- $P(A) = 0{,}090 + 0{,}302 = 0{,}392$
- $P(B) = 0{,}090 + 0{,}425 = 0{,}515$
- $P(A \cap B) = 0{,}090$
- $P(A \cup B) = 0{,}090 + 0{,}425 + 0{,}302 = 0{,}817$
- $P(B - A) = 0{,}425$

Βιβλιογραφία

- Παπαδημητρίου, Γ. (2001). *Περιγραφική Στατιστική*. Θεσσαλονίκη: Παρατηρητής.
- Παπαδόπουλος, Γ. (…). *Σημειώσεις*. Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής (www.aua.gr/gpapadopoulos).
- Menexes, G. (1998). *An Investigation into Theories of the Development of Concepts of Probability*. Dissertation submitted in part fulfilment of the Degree of Master of Arts in Education Studies of the University of Surrey in September 1998.
- Φωτιάδης, Ν. (1995). *Εισαγωγή στη Στατιστική για Βιολογικές Επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.
- Κουνιάς, Σ. & Μωυσιάδης, Χ. (1985). *Πιθανότητες Ι: Θεωρία και Ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Έκδοση: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων.
- Κουνιάς, Σ., Κολυβά-Μαχαίρα, Φ., Μπαγιάτης, Κ. & Μπόρα-Σέντα, Ε. (1985). *Εισαγωγή στη Στατιστική*. Θεσσαλονίκη.
- Zar, J. (1996). *Biostatistical Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.
- Καστάνης, Ν. (…). Παρουσίαση: Μια Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Μαρία Αλεμπάκη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης