ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

6ο Μάθημα: Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Έλεγχοι Υποθέσεων

Γεώργιος Μενεξές
Τμήμα Γεωπονίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

6ο Μάθημα

Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Έλεγχοι Υποθέσεων

Η παρουσίαση βασίζεται σε υλικό από το έργο των…

- Κολυβά, Φ. και Μπόρα-Σέντα, Ε. (1995). Στατιστική: Θεωρία-Εφαρμογές. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (I)

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n \geq 30$	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n < 30$	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		$n \geq 30$	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		$n < 30$	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, $m \geq 30$	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (ΙΙ)

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ όπου $s^2=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}$ και $v=n+m-2$
	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}}$ και $v=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n\neq m$ ενώ $v=2(n-1)$ όταν $n=m$
$\mu_1-\mu_2$	ζευγαρωτές παρατηρήσεις	n<30	$\bar{z}\pm\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\,a/2}$ όπου $\bar{z}$ η μέση τιμή των x_i-y_i και s_z^2 η διασπορά των x_i-y_i
σ_1^2/σ_2^2			$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\Big/F_{n-1,\,m-1;\,a/2},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{m-1,\,n-1;\,a/2}\right)$
p_1-p_2		n, m≥30	$\hat{p}_1-\hat{p}_2\pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
		n<30	άβακες

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Έλεγχοι Υποθέσεων – Ένα δείγμα (Ι)

H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z>z_a\}$	
		σ^2 άγνωστο $n\geq30$	$R = \{t>z_a\}$	
		σ^2 άγνωστο $n<30$	$R = \{t>t_{n-1;\,a}\}$	
	$\mu<\mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z<-z_a\}$	όπου $z = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ και $t = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$
		σ^2 άγνωστο $n\geq30$	$R = \{t<-z_a\}$	
		σ^2 άγνωστο $n<30$	$R = \{t<-t_{n-1;\,a}\}$	
	$\mu\neq\mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{\lvert z\rvert>z_{a/2}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n\geq30$	$R = \{\lvert t\rvert>z_{a/2}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n<30$	$R = \{\lvert t\rvert>t_{n-1;\,a/2}\}$	Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Έλεγχοι Υποθέσεων – Ένα δείγμα (ΙΙ)

$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$		$R=\{X^2>X^2_{n-1;\,a}\}$ $R=\{X^2<\mathscr{X}^2_{n-1;\,1-a}\}$ $R=\{X^2>X^2_{n-1;\,a/2}$ ή $X^2<\mathscr{X}^2_{n-1;\,1-a/2}\}$	όπου $X^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
$p=p_0$	$p>p_0$ $p<p_0$ pIp_0	$n>30$ $n>30$ $n>30$	$R=\{z>z_a\}$ $R=\{z<-z_a\}$ $R=\{\lvert z\rvert>z_{a/2}\}$	όπου $z=\dfrac{(\hat{p}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ και $\hat{p}=\dfrac{x}{n}$ (x=αριθμός επιτυχιών)

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Έλεγχοι Υποθέσεων – Δύο δείγματα (Ι)

H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστά	$R=\{z>z_a\}$	$z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως $\delta=0$
		σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα n, m>30	$R=\{z>z_a\}$	$z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1=\sigma_2=\sigma=$ άγνωστο n, m<30	$R=\{t>t_{n+m-2;\,a}\}$	$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$, $s=\sqrt{\dfrac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}}$
		$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο n, m<30	$R=\{t>t_{v;\,a}\}$	$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$, όταν n=m, $v=2(n-1)$ όταν $n\neq m$, $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1}+\dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R=\left\{\dfrac{\bar{z}\sqrt{n}}{s_z}>t_{n-1;\,a}\right\}$	όπου $\bar{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των x_i-y_i
	$\mu_1-\mu_2<\delta$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστά	$R=\{z<-z_a\}$	$z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως $\delta=0$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Έλεγχοι Υποθέσεων – Δύο δείγματα (ΙΙ)

H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
		σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα n, m>30	$R = \{z < -z_a\}$	$z = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ άγνωστο n, m<30	$R = \{t < -t_{n+m-2;\, a}\}$	$t = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$ και $s = \sqrt{\dfrac{(n-1)\, s_1^2+(m-1)\, s_2^2}{n+m-2}}$
		$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ άγνωστα n, m<30	$R = \{t < -t_{v;\, a}\}$	$t = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$ όταν n=m, $v=2(n-1)$ όταν n≠m, $v = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1}+\dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R = \left\{\dfrac{\bar{z}\sqrt{n}}{s_z} < t_{n-1;\, a}\right\}$	όπου $\bar{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των $x_i - y_i$
	$\mu_1-\mu_2 \neq \delta$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστά	$R = \{\lvert z\rvert > z_{a/2}\}$	$z = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως δ=0
		σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα n, m>30	$R = \{\lvert z\rvert > z_{a/2}\}$	$z = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ άγνωστο n, m<30	$R = \{\lvert t\rvert > t_{n+m-2;\, a/2}\}$	$t = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$ $s = \sqrt{\dfrac{(n-1)\, s_1^2+(m-1)\, s_2^2}{n+m-2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Έλεγχοι Υποθέσεων – Δύο δείγματα (ΙΙΙ)

H_0	H_1	Προϋποθέσεις	Απορρ. περιοχή R	Επεξηγήσεις
		$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ άγνωστα n, m<30	$R = \{\lvert t\rvert > t_{v;\, a/2}\}$	$t = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$, όταν n=m, $\nu=2(n-1)$ όταν $n \neq m$, $\nu = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1}+\dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R = \left\{ \left\lvert \dfrac{\bar{z}\sqrt{n}}{s_z} \right\rvert > t_{n-1;\, a/2} \right\}$	όπου $\bar{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των $x_i - y_i$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ή $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$s_1 > s_2$	$R = \left\{ \dfrac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n-1,\, m-1;\, a} \right\}$	
	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$s_2 > s_1$	$R = \left\{ \dfrac{s_2^2}{s_1^2} > F_{m-1,\, n-1;\, a} \right\}$	
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$s_1^2 \geq s_2^2$ $s_2^2 \geq s_1^2$	$R = \left\{ \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{n-1,\, m-1;\, a/2} \right\}$ $R = \left\{ \dfrac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{m-1,\, n-1;\, a/2} \right\}$	
$p_1 - p_2 = \delta$	$p_1 > p_2$	n, m≥30	$R = \{z > z_a\}$	$z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta}{s}$ $\quad \hat{p}_1 = \dfrac{x}{n}$ $\quad \hat{p}_2 = \dfrac{y}{m}$
	$p_1 < p_2$	n, m≥30	$R = \{z < -z_a\}$	όταν δ=0, $s = \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)}$, $\hat{p} = \dfrac{x+y}{n+m}$ $\quad \hat{q} = 1-\hat{p}$
	$p_1 \neq p_2$	n, m≥30	$R = \{\lvert z\rvert > z_{a/2}\}$	όταν δ≠0, $s = \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n}+\dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{m}}$ $\quad \hat{q}_1 = 1-\hat{p}_1$ $\quad \hat{q}_2 = 1-\hat{p}_2$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Βιβλιογραφία

- **Κολυβά, Φ. και Μπόρα-Σέντα, Ε. (1995).** *Στατιστική: Θεωρία-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
- **Φωτιάδης, Ν. (1995).** *Εισαγωγή στη Στατιστική για Βιολογικές Επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.
- **Φασούλας, Α. Κ. (ανατ. 2008).** *Στοιχεία Πειραματικής Στατιστικής*. Θεσσαλονίκη: Άγις-Σάββας Δ. Γαρταγάνης.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Γεώργιος Μενεξές. «Στατιστική. Διαστήματα Εμπιστοσύνης και Έλεγχοι Υποθέσεων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS484/

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Μαρία Αλεμπάκη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ