ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Νικόλαος Θεοδοσίου- Αν. καθηγήτης
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή και απαλειφή μεταβλητών

$$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k + 0x_{k+1} + 0x_{k+2} + \ldots + 0x_{k+m} = \max$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + x_{k+1} + \ldots + 0 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + 0 + x_{k+2} + \ldots + 0 = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + 0 + 0 + \ldots + x_{k+m} = b_m \end{array}\right\}$$

Αρχική βασική λύση

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, x_{k+1} = b_1, x_{k+2} = b_2, \ldots, x_{k+m} = b_m$$

(n – m = k + m – m = k μεταβλητές με μηδενική τιμή)

Εισαγωγή και απαλειφή μεταβλητών

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mk} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ \boxed{x_{k+1}} \\ \boxed{x_{k+2}} \\ . \\ \boxed{x_{k+m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

– 1η σειρά: Διαίρεση με α11

– Υπόλοιπες σειρές: αij- α1j αi1/α11

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & . & . & . & \frac{a_{1k}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & . & . & . & a_{2k} - a_{1k}\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 - \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{m2} - a_{12}\frac{a_{m1}}{a_{11}} & . & . & . & a_{mk} - a_{1k}\frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 - \frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ . \\ x_{k+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{b_1}{a_{11}}} \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ . \\ . \\ . \\ \boxed{b_m - b_1\frac{a_{m1}}{a_{11}}} \end{bmatrix}$$

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

Με δεδομένη μια ορισμένη βασική λύση που δίνει μια τιμή V στην αντικειμενική συνάρτηση, ο σκοπός μας είναι να εισάγουμε την κατάλληλη μεταβλητή και να απαλείψουμε επίσης την κατάλληλη μεταβλητή, ώστε η καινούρια βασική λύση που θα προκύψει να **αυξάνει κατά το μέγιστο δυνατό την τιμή V της αντικειμενικής συνάρτησης.**

Έτσι διαδοχικά θα προσδιορίζουμε βασικές λύσεις που θα αντιστοιχούν σε ολονέν αυξανόμενες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η λύση του προβλήματος θα είναι εκείνη η βασική λύση, στην οποία θα διαπιστωθεί ότι εισαγωγή μιας μεταβλητής και απαλοιφή άλλης μιας μεταβλητής δεν αυξάνει περισσότερο την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

$$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k + 0x_{k+1} + 0x_{k+2} + \ldots + 0x_{k+m} = \max$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + x_{k+1} + \ldots + 0 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + 0 + x_{k+2} + \ldots + 0 = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + 0 + 0 + \ldots + x_{k+m} = b_m
\end{array}\right\}$$

- Κάθε μεταβλητή xi μεταβάλλεται κατά λγi

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

$$a_{11}(x_1+\lambda y_1)+a_{12}(x_2+\lambda y_2)+\ldots+a_{1k}(x_k+\lambda y_k)+(x_{k+1}+\lambda y_{k+1})+0+\ldots+0=b_1$$

$$a_{21}(x_1+\lambda y_1)+a_{22}(x_2+\lambda y_2)+\ldots+a_{2k}(x_k+\lambda y_k)+0+(x_{k+2}+\lambda y_{k+2})+\ldots+0=b_2$$

....

$$a_{m1}(x_1+\lambda y_1)+a_{m2}(x_2+\lambda y_2)+\ldots+a_{mk}(x_k+\lambda y_k)+0+0+\ldots+(x_{k+m}+\lambda y_{k+m})=b_m$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\ldots+\alpha_{1k}y_k+y_{k+1}+0+\ldots+0=0\\
\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\ldots+\alpha_{2k}y_k+0+y_{k+2}+\ldots+0=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{m1}y_1+\alpha_{m2}y_2+\ldots+\alpha_{mk}y_k+0+0+\ldots+y_{k+m}=0
\end{array}\right\}$$

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

$$V_1 = v_1\left(x_1 + \lambda y_1\right) + v_2\left(x_2 + \lambda y_2\right) + \ldots + v_k\left(x_k + \lambda y_k\right) + 0\left(x_{k+1} + \lambda y_{k+1}\right) + \ldots + 0\left(x_{k+m} + \lambda y_{k+m}\right)$$

$$\Delta V = \lambda\left(v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_k y_k + 0.y_{k+1} + \ldots + 0.y_{k+m}\right)$$

- Αν εισαχθεί η μεταβλητή x1 στη βασική λύση:
- Υποθέτουμε ότι μεταβάλλεται μόνο η x1 με μοναδιαία μεταβολή y1
- y1=1, y2= y3= ... yk=0
- Υπολογίζονται άμεσα οι μεταβλητές που υπεισέρχονται στη βασική λύση

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1k}y_k + y_{k+1} + 0 + \ldots + 0 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2k}y_k + 0 + y_{k+2} + \ldots + 0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mk}y_k + 0 + 0 + \ldots + y_{k+m} = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_{k+1} = -a_{11} \\ y_{k+2} = -a_{21} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{k+m} = -a_{m1} \end{array}\right\}$$

συντελεστές της x1 στους m περιορισμούς

Η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι:

$$\Delta V_1 = \lambda\left(v_1 + v_2.0 + \ldots + v_k.0 + 0.\left(-a_{11}\right) + \ldots + 0.\left(-a_{m1}\right)\right)$$

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

– Αν εισαχθεί η μεταβλητή x_j στη βασική λύση:

– $y_j=1,\ y_1= y_2= y_{j-1}= y_{j+1}= \dots\ y_k=0$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1k}y_k + y_{k+1} + 0 + \dots + 0 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2k}y_k + 0 + y_{k+2} + \dots + 0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mk}y_k + 0 + 0 + \dots + y_{k+m} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{k+1} = -a_{1j} \\ y_{k+2} = -a_{2j} \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{k+m} = -a_{mj} \end{array}\right\}$$

–Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\Delta V = \lambda\left(v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_k y_k + 0.y_{k+1} + \dots + 0.y_{k+m} \right)$$

$$\Delta V_j = \lambda\left(v_j - \sum_s a_{sj} v_s \right)$$

όπου ο δείκτης s αναφέρεται στις μεταβλητές που υπεισέρχονται στη βασική λύση

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εισαγωγή μεταβλητής

Απ’ όλες τις τιμές Δvj, που αναφέρονται σε κάθε μια μεταβλητή που δεν υπεισέρχεται στη βασική λύση, προσδιορίζεται η μεγαλύτερη.
Η μεταβλητή xj που αντιστοιχεί σ’ αυτή τη μεγαλύτερη τιμή του Δvj είναι η μεταβλητή που μπαίνει στη βασική λύση, γιατί η εισαγωγή της στη βασική λύση, αυξάνει κατά το μέγιστο δυνατό (κατά Δvj) την αντικειμενική συνάρτηση.

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εξαγωγή μεταβλητής

- Αν x1 είναι η μεταβλητή που θα πάρει τιμή $\overline{0}$, τότε οι βασικές μεταβλητές θα πάρουν τιμές:
- xk+1=b1-α11 x1, x1 $\leq$ b1/ α11
- xk+2=b2-α21 x1, x1 $\leq$ b2/ α21
- xk+i=bi-αi1 x1, x1 $\leq$ bi/ αi1

Μία από αυτές θα πρέπει να μηδενιστεί, δηλ. η x1 θα πάρει τιμή που να μηδενίζει μία βασική μεταβλητή αλλά να διατηρεί τις υπόλοιπες μη αρνητικές

Διαδικασία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης - Εξαγωγή μεταβλητής

– Απαλείφεται η μεταβλητή που δημιουργεί τον αυστηρότερο περιορισμό στην εισαγόμενη μεταβλητή

– Αν $x1$ η εισαγόμενη μεταβλητή και $xk+1$ η απαλειφόμενη:

– $x1 = b1 / a11$

– Αν απαλειφθεί η μεταβλητή $xk+i$:

– $x1 = bi / ai1$

Η μέθοδος Simplex - 1ος πίνακας

$$\Delta V_j = \lambda\left(v_j - \sum_s a_{sj} v_s\right)$$

λ=1

		x_1	x_2	……	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	……	x_{k+m}		
1	x_{k+1}	a_{11}	a_{12}	……	a_{1k}	1	0	……	0	b_1	$\frac{b_1}{a_{11}}$
2	x_{k+2}	a_{21}	a_{22}	……	a_{2k}	0	1	……	0	b_2	$\frac{b_2}{a_{21}}$
3	x_{k+3}	a_{31}	a_{32}	……	a_{3k}	0	0	……	0	b_3	$\frac{b_3}{a_{31}}$
…	…	…	…	……	…	…	…	……	…	…	…
m	x_{k+m}	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mk}	0	0	……	1	b_m	$\frac{b_m}{a_{m1}}$
		v_1	v_2	……	v_k	0	0	……	0	v	
		v_1	v_2	……	v_k	-	-	……	-	Δv_j	

Η μέθοδος Simplex - 2ος πίνακας

$$\Delta V_j = \lambda\left(v_j - \sum_s a_{sj} v_s \right)$$

		x_1	x_2	......	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	......	x_{k+m}		
1	x_{k+1}	0	$a_{12} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{21}}$	......	$a_{1k} - a_{2k}\frac{a_{11}}{a_{21}}$	1	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}$	......	0	$b_1 - b_2\frac{a_{11}}{a_{21}}$	$\frac{b_1 - b_2\frac{a_{11}}{a_{21}}}{a_{12} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{21}}}$
2	x_1	1	$\frac{a_{22}}{a_{21}}$	......	$\frac{a_{2k}}{a_{21}}$	0	$\frac{1}{a_{21}}$	......	0	$\frac{b_2}{a_{21}}$	$\frac{\frac{b_2}{a_{21}}}{\frac{a_{22}}{a_{21}}}$
3	x_{k+3}	0	$a_{32} - a_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}$	......	$a_{3k} - a_{2k}\frac{a_{31}}{a_{21}}$	0	$-\frac{a_{31}}{a_{21}}$	......	0	$b_3 - b_2\frac{a_{31}}{a_{21}}$	$\frac{b_3 - b_2\frac{a_{31}}{a_{21}}}{a_{32} - a_{22}\frac{a_{31}}{a_{21}}}$
...	...	...	...	......	...	...	...	......	...	...	...
m	x_{k+m}	0	$a_{m2} - a_{22}\frac{a_{m1}}{a_{21}}$	......	$a_{mk} - a_{2k}\frac{a_{m1}}{a_{21}}$	0	$-\frac{a_{m1}}{a_{21}}$	......	1	$b_m - b_2\frac{a_{m1}}{a_{21}}$	$\frac{b_m - b_2\frac{a_{m1}}{a_{21}}}{a_{m2} - a_{22}\frac{a_{m1}}{a_{21}}}$
		v_1	v_2	......	v_k	0	0	......	0	v	
		-	$\Delta V_2 = v_2 - v_1\frac{a_{22}}{a_{21}}$	......	$\Delta V_k = v_k - v_1\frac{a_{2k}}{a_{21}}$	-	-	......	-	Δv_j	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Μαθηματικό μοντέλο
  - Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = 6x_1 + 4x_2 = \max$$

  - Περιορισμοί

$$4x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

$$V = 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 = max$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 = 40 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 15 \end{array}\right\}$$

$V = 6x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 = max$

1ος ΠΙΝΑΚΑΣ SIMPLEX-1η ΒΑΣΙΚΗ ΛΥΣΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b’
X_3	4	2	1	0	40	
X_4	1	1	0	1	15	
v	6	4	0	0		
Δv						

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Δv- ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b’
X_3	4	2	1	0	40	
X_4	1	1	0	1	15	
v	6	4	0	0		
Δv	6-(4*0+1*0)=6	4-(2*0+1*0)=4	/			

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ b’- ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b’
X_3	4	2	1	0	40	40/4=10
X_4	1	1	0	1	15	15/1=15
v	6	4	0	0		
Δv	6-(4*0+1*0)=6	4-(2*0+1*0)=4	/	/		

2ος ΠΙΝΑΚΑΣ SIMPLEX-2η ΒΑΣΙΚΗ ΛΥΣΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b'
X_1	1	0,5	0,25	0	10	
X_4	1-1=0	1-0,5=0,5	0-0,25= -0,25	1-0=1	15-10=5	
v	6	4	0	0		
Δv						

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Δv- ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b'
X_1	1	0,5	0,25	0	10	
X_4	0	0,5	-0,25	1	5	
v	6	4	0	0		
Δv	/	4-(0,5*6+0,5*0)= 1	0-(0,25*6 -0,25*0) =-1,5	/		

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ b'- ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b'
X_1	1	0,5	0,25	0	10	10/0,5=20
X_4	0	0,5	-0,25	1	5	5/0,5=10
v	6	4	0	0		
Δv	/	4-(0,5*6+0,5*0)=1	0-(0,25*6-0,25*0)= -1,5	/		

3ος ΠΙΝΑΚΑΣ SIMPLEX-3η ΒΑΣΙΚΗ ΛΥΣΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b'
X_1	1	0	0,5	-1	5	
X_2	0	1	-0,5	2	10	
v	6	4	0	0		
Δv	/	/				

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Δv- ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

	X_1	X_2	X_3	X_4	b	b’
X_1	1	0	0,5	-1	10	
X_2	0	1	-0,5	2	5	
v	6	4	0	0		
Δv	/	/	0-(0,5*6- 0,5*4)= -1	0-(-1*6 + 2*4)= -2		

Τεχνητές μεταβλητές

$$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k = \max$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1k} x_k \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2k} x_k \geq b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \ldots + a_{3k} x_k \leq b_3 \\ \qquad\qquad\qquad V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k = \max \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mk} x_k \leq b_m \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \ldots\ldots \\ x_k \geq 0 \end{array}\right\}$$

Τεχνητές μεταβλητές

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k - x_{k+1} + 0.x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + 0.x_{k+m} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + 0.x_{k+1} - x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + 0.x_{k+m} = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3k}x_k + 0x_{k+1} + 0x_{k+2} + x_{k+3} + \ldots + 0x_{k+m} = b_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + 0x_{k+1} + 0x_{k+2} + 0x_{k+3} + \ldots + x_{k+m} = b_m$$

$$\begin{aligned} &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \\ &\ldots\ldots \\ &x_k \geq 0 \\ &x_{k+1} \geq 0 \\ &\ldots\ldots \\ &x_{k+m} \geq 0 \end{aligned}$$

- Αρχική βασική λύση:
- x1=0, x2=0, ... , xk=0
- xk+1= -b1, xk+2= -b2
- xk+3= b3, ... , xk+m= bm

Τεχνητές μεταβλητές

$$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + \ldots + \quad 0.\mathrm{x}_{\mathrm{k+m}} - \mathrm{M.x}_{\mathrm{k+m+1}} - \mathrm{M.x}_{\mathrm{k+m+2}} = \max$$

$$\alpha_{11}\mathrm{x}_1 + \alpha_{12}\mathrm{x}_2 + \ldots + \alpha_{1k}\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_{k+1} + 0.\mathrm{x}_{k+2} + 0.\mathrm{x}_{k+3} + \ldots + \quad 0.\mathrm{x}_{k+m} + \mathrm{x}_{k+m+1} + 0.\mathrm{x}_{k+m+2} = \mathrm{b}_1$$

$$\alpha_{21}\mathrm{x}_1 + \alpha_{22}\mathrm{x}_2 + \ldots + \alpha_{2k}\mathrm{x}_k + 0.\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_{k+2} + 0.\mathrm{x}_{k+3} + \ldots \quad +0.\,\mathrm{x}_{k+m} + 0.\,\mathrm{x}_{k+m+1} + \mathrm{x}_{k+m+2} = \mathrm{b}_2$$

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots + \alpha x_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + x_{k+3} + \ldots + 0.x_{k+m} + 0.x_{k+m+1} + 0.x_{k+m+2} = b_3$$

....

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mk}x_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + x_{k+m} + 0.x_{k+m+1} + 0.x_{k+m+2} = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m}, x_{k+m+1}, x_{k+m+2} \geq 0$$

- Αρχική βασική λύση:

$x_1=0, \ldots, x_{k+2}=0, x_{k+3}=b_3, \ldots, x_{k+m}=b_m, x_{k+m+1}=b_1, x_{k+m+2}=b_2$

Τεχνητές μεταβλητές

$$V = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_kx_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + \ldots + \quad 0.x_{k+m} - M.x_{k+m+1} - M.x_{k+m+2} = \max$$

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k \text{ - } x_{k+1} + 0.x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + \ 0.x_{k+m} + x_{k+m+1} + 0.x_{k+m+2} = b_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + 0.x_{k+1} \text{ - } x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + 0.x_{k+m} + 0.x_{k+m+1} + x_{k+m+2} = b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots + \alpha_{3k}x_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + x_{k+3} + \ldots + 0.x_{k+m} + 0.x_{k+m+1} + 0.x_{k+m+2} = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mk}x_k + 0.x_{k+1} + 0.x_{k+2} + 0.x_{k+3} + \ldots + x_{k+m} + 0.x_{k+m+1} + 0.x_{k+m+2} = b_m \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+m}, x_{k+m+1}, x_{k+m+2} \geq 0$$

- Αρχική βασική λύση:
- x1=0,… , xk+2= 0, xk+3= b3, … , xk+m= bm , xk+m+1= b1 , xk+m+2= b2

Παράδειγμα

Μια εταιρία υδάτων διαχειρίζεται τα υπόγεια και επιφανειακά νερά μιας περιοχής για την ύδρευση μιας πόλης και την άρδευση της γύρω περιοχής.

Για τη θερινή περίοδο υπολογίσθηκε ότι οι μέγιστοι διαθέσιμοι όγκοι υπόγειου και επιφανειακού νερού είναι αντίστοιχα 3.10^6 και $2{,}2.10^6$ m^3, ενώ για την ίδια περίοδο οι ελάχιστες αναγκαίες ποσότητες νερού για ύδρευση και άρδευση είναι $1{,}5.10^6$ και $2{,}8.10^6$ m^3 αντίστοιχα.

Επειδή η γεύση του επιφανειακού νερού δεν είναι καλή, η εταιρία είναι υποχρεωμένη να δίνει για ύδρευση νερό ανάμικτο με αναλογία υπόγειου προς επιφανειακό νερό τουλάχιστον 2:1.

Το λειτουργικό κόστος του νερού (που προέρχεται από τις εγκαταστάσεις καθαρισμού και τα αντλιοστάσια) είναι: Για το υπόγειο νερό 0,32 €/m^3, όταν προορίζεται για ύδρευση και 0,24 €/$m^{3,}$ όταν προορίζεται για άρδευση, ενώ για το επιφανειακό νερό 0,26 €/m^3, όταν προορίζεται για ύδρευση και 0,2 €/m^3, όταν προορίζεται για άρδευση.

Θα υπολογίσουμε πόσο υπόγειο και πόσο επιφανειακό νερό πρέπει να διαθέσει η εταιρία κατά τη θερινή περίοδο για ύδρευση και άρδευση, ώστε να έχει το ελάχιστο λειτουργικό κόστος.

Παράδειγμα

- Διατύπωση προβλήματος
  - Ύδρευση και άρδευση
  - Μέγιστοι διαθέσιμοι όγκοι νερού

    Υπόγειο: 3.10^6 m^3 Επιφανειακό: $2,2.10^6$ m^3
  - Ελάχιστες αναγκαίες ποσότητες νερού

    Ύδρευση: $1,5.10^6$ m^3 Αρδευση: $2,8.10^6$ m^3
  - Νερό ύδρευσης: Αναλογία υπόγειου

    προς επιφανειακό τουλάχιστον 2:1
  - Λειτουργικό κόστος υπόγειου νερού:

    0,32 €/m^3 (Ύδρευση), 0,24 €/m^3 (Αρδευση)
  - Λειτουργικό κόστος επιφανειακού νερού:

    0,26 €/m^3 (Ύδρευση), 0,2 €/m^3 (Αρδευση)
  - Υπολογισμός υπόγειου και επιφανειακού νερού που διατίθεται για ύδρευση και άρδευση, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το λειτουργικό κόστος

Παράδειγμα

x_1=υπόγειο - ύδρευση

x_2= υπόγειο - άρδευση

x_3= επιφανειακό - ύδρευση

x_4= επιφανειακό - άρδευση

– Αντικειμενική συνάρτηση (πολ/μένη επί 25)

$$V = 8x_1 + 6x_2 + 6{,}5x_3 + 5x_4 = \min$$

– Περιορισμοί

$$x_1 + x_3 \geq 15$$ (ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα νερού για ύδρευση)

$$x_2 + x_4 \geq 28$$ (ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα νερού για άρδευση)

$$x_1 + x_2 \leq 30$$ (μέγιστο απόθεμα υπόγειου νερού)

$$x_3 + x_4 \leq 22$$ (μέγιστο απόθεμα επιφανειακού νερού)

$$-x_1 + 2x_3 \leq 0$$ (ελάχιστη αναλογία υπόγειου προς επιφανειακό νερό)

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$

Παράδειγμα - Κανονική μορφή

– Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = -8x_1 - 6x_2 - 6{,}5x_3 - 5x_4 + 0.x_6 - Mx_7 - Mx_8 + 0.x_9 + 0.x_{10} + 0.x_{11} = \max$$

– Περιορισμοί

$$x_1 + x_3 \geq 15$$
$$x_2 + x_4 \geq 28$$
$$x_1 + x_2 \leq 30$$
$$x_3 + x_4 \leq 22$$
$$-x_1 + 2x_3 \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + 0.x_2 + x_3 + 0.x_4 - x_5 + 0.x_6 + x_7 + 0.x_8 + 0.x_9 + 0.x_{10} + 0.x_{11} = 15 \\
0.x_1 + x_2 + 0.x_3 + x_4 + 0.x_5 - x_6 + 0.x_7 + x_8 + 0.x_9 + 0.x_{10} + 0.x_{11} = 28 \\
x_1 + x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 + 0.x_8 + x_9 + 0.x_{10} + 0.x_{11} = 30 \\
0.x_1 + 0.x_2 + x_3 + x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 + 0.x_8 + 0.x_9 + x_{10} + 0.x_{11} = 22 \\
-x_1 + 0.x_2 + 2.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 + 0.x_8 + 0.x_9 + 0.x_{10} + x_{11} = 0
\end{array}\right\}$$

$x_i \geq 0$ (I=1,2,……,11)

Παράδειγμα: 1ος-2ος πίνακας Simplex

1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	15	∞Err
2	x_8	0	1	0	**1**	0	-1	0	1	0	0	0	28	28
3	x_9	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	30	∞Err
4	x_{10}	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**22**	**22**
5	x_{11}	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0/0
		-8	-6	-6,5	**-5**	0	0	-M	-M	0	0	0	-43M	
		-8+M	-6+M	-	-5+M	-M	-M	-	-	-	-	-		

2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	1	**0**	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	15	∞Erro
2	x_8	**0**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**6**	**6**
3	x_9	1	**1**	0	0	0	0	0	0	1	0	0	30	30
4	x_4	0	**0**	1	1	0	0	0	0	0	1	0	22	∞Err
5	x_{11}	-1	**0**	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0/0
		-8	**-6**	-6,5	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-21M-	
		-8+M	-6+M	-1,5	-	-M	-M	-	-	-	-	-		

Παράδειγμα: 2ος-3ος πίνακας Simplex

2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	15	∞ Erro
2	x_8	0	1	-1	0	0	-1	0	1	0	-1	0	6	6
3	x_9	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	30	30
4	x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	22	∞ Err
5	x_{11}	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0/0
		-8	-6	-6,5	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-21M-	
		-8+M	**-6+M**	-1,5	-	-M	-M	-	-	-	-	-		

3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	1	0	**1**	0	-1	0	1	0	0	0	0	15	15
2	x_2	0	1	**-1**	0	0	-1	0	1	0	-1	0	6	
3	x_9	1	0	**1**	0	0	1	0	-1	1	1	0	24	24
4	x_4	0	0	**1**	1	0	0	0	0	0	1	0	22	22
5	x_{11}	**-1**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
		-8	-6	**-6,5**	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-15M-	
		-8+M	-	**-7,5+M**	-	-M	-6	-	-M+6	-	-1	-		

Παράδειγμα: 3ος-4ος πίνακας Simplex

3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	1	0	**1**	0	-1	0	1	0	0	0	0	15	15
2	x_2	0	1	**-1**	0	0	-1	0	1	0	-1	0	6	
3	x_9	1	0	**1**	0	0	1	0	-1	1	1	0	24	24
4	x_4	0	0	**1**	1	0	0	0	0	0	1	0	22	22
5	x_{11}	**-1**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
		-8	-6	**-6,5**	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-15M-	
		-8+M	-	**-7,5+M**	-	-M	-6	-	-M+6	-	-1	-		

4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x	1,5	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-0,5	15	10
2	x	-0,5	1	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0,5	6	
3	x	1,5	0	0	0	0	1	0	-1	1	1	-0,5	24	16
4	x	0,5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-0,5	22	44
5	x	-0,5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	
		-8	-6	-6,5	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-15M-	
		1,5M-	-	-	-	-M	-6	-	-M+6	-	-1	-0.5M+3,75		

Παράδειγμα: 4ος-5ος πίνακας Simplex

4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
1	x_7	**1,5**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-0,5**	**15**	**10**
2	x_2	**-0,5**	1	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0,5	6	
3	x_9	**1,5**	0	0	0	0	1	0	-1	1	1	-0,5	24	16
4	x_4	**0,5**	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-0,5	22	44
5	x_3	**-0,5**	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	
		-8	-6	-6,5	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	-15M-	
		1,5M-	-	-	-	-M	-6	-	-M+6	-	-1	-0.5M+3,75		

5

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
1	x_1	1	0	0	0	-0.67	0	0.67	0	0	0	-0.33	**10**
2	x_2	0	1	0	0	-0.33	-1	0.33	1	0	-1	0.33	**11**
3	x_9	0	0	0	0	1	1	-1	-1	1	1	0	**9**
4	x_4	0	0	0	1	0.33	0	-0.33	0	0	1	-0.33	**17**
5	x_3	0	0	1	0	-0.33	0	0.33	0	0	0	0.33	**5**
		8	-6	-6,5	-5	0	0	-M	-M	0	0	0	
		-	-	-	-	-	-6	-M+7,835	-M+6	-	-1	-	

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αλέξανδος Π. Τσαούσογλου

Θεσσαλονίκη, 1.09.2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης