ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί

Ενότητα **2**: Ανασκόπηση θεωρίας εκτίμησης παραμέτρων και συνόρθωσης παρατηρήσεων

Χριστόφορος Κωτσάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανασκόπηση θεωρίας εκτίμησης παραμέτρων και συνόρθωσης παρατηρήσεων

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μοντέλα, αντίστροφα προβλήματα, σφάλματα και ο ρόλος της συνόρθωσης

2. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

3. Μέθοδος βέλτιστης γραμμικής ανεπηρέαστης εκτίμησης παραμέτρων (BLUE)

4. Μεταβλητότητα αναφοράς (μοντέλα Gauss-Markov)

5. Ακρίβεια αποτελεσμάτων - Στατιστικοί έλεγχοι

Σκοποί ενότητας

- ***Η έννοια του μοντέλου στην ανάλυση δεδομένων. Βασικοί τύποι παραμετρικών μοντέλων για τοπογραφικές και γεωδαιτικές εφαρμογές. Ορθά και αντίστροφα προβλήματα. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για την επεξεργασία τοπογραφικών και γεωδαιτικών μετρήσεων. Μέθοδος βέλτιστης γραμμικής ανεπηρέαστης εκτίμησης σε γραμμικά μοντέλα. Μοντέλα τύπου Gauss-Markov και ο ρόλος της μεταβλητότητας αναφοράς. Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων και άλλα χρήσιμα εργαλεία.***

Τίτλος και Αρίθμηση (1/4)

1. Εισαγωγή
2. Μαθηματικό Μοντέλο
3. Παράδειγμα
4. Αντίστροφα Προβλήματα
5. Διεύρυνση Μοντέλου
6. Η έννοια των σφαλμάτων
7. Νέο «αντίστροφο» πρόβλημα

Τίτλος και Αρίθμηση (2/4)

8. Τι είναι η «συνόρθωση»
9. Γραμμικοποίηση μοντέλου
10. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
11. Λύση Ελαχίστων Τετραγώνων
12. Παράδειγμα
13. Σφάλματα και Πίνακας Βάρους
14. Ανοιχτά ζητήματα

Τίτλος και Αρίθμηση (3/4)

15. Μέθοδος βέλτιστης στατιστικής εκτίμησης παραμέτρων
16. Λύση BLUE
17. Γραμμικά μοντέλα Gauss – Markov
18. Τι είναι η μεταβλητότητα αναφοράς
19. Εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς
20. Χρήση της μεταβλητότητας αναφοράς
21. Τι τιμές έχει η μεταβλητότητα αναφοράς και πως αξιολογούνται

Τίτλος και Αρίθμηση (4/4)

22. Συμπερασματικά
23. Αξιολόγηση ακρίβειας συνόρθωσης
24. Τι είναι ο Νόμος μετάδοσης Συμ-μεταβλητοτήτων
25. Εφαρμογή στα αποτελέσματα συνόρθωσης
26. Αξιολόγηση ακρίβειας (σχόλια)
27. Γενικά Σχόλια
28. Από τις βέλτιστες εκτιμήσεις στους στατιστικούς ελέγχους
29. Ο απλούστερος στατιστικός έλεγχος

Ανασκόπηση θεωρίας εκτίμησης παραμέτρων και συνόρθωσης παρατηρήσεων

Εισαγωγή

- Πολλές εφαρμογές στις επιστήμες Μηχανικού απαιτούν τον προσδιορισμό ενός συνόλου μη-παρατηρήσιμων παραμέτρων από μετρήσεις παρατηρήσιμων μεγεθών.
- Γενικά, για τον σκοπό αυτό απαιτούνται:

▪ **Μαθηματικό μοντέλο**

– Σύστημα εξισώσεων που συνδέει τις παραμέτρους του προβλήματος και τα παρατηρούμενα μεγέθη

▪ **Μεθοδολογία εκτίμησης**

– Με ποια κριτήρια και αλγοριθμική διαδικασία θα γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων από τις διαθέσιμες μετρήσεις;

▪ **Μεθοδολογία αξιολόγησης της ποιότητας αποτελεσμάτων**

– Έλεγχος της ακρίβειας και αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων μέσω στατιστικών τεχνικών

Μαθηματικό μοντέλο (1/5)

Γενική μορφή

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}}$$

Μοντέλο μεικτών εξισώσεων

x: διάνυσμα παραμέτρων

y: διάνυσμα παρατηρούμενων μεγεθών

f(,): σύνολο αλγεβρικών σχέσεων μεταξύ των **x** και **y**

Ειδική μορφή

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

Μοντέλο εξισώσεων παρατηρήσεων

Μαθηματικό μοντέλο (2/5)

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{cases}$$

Το μοντέλο **εξισώσεων παρατηρήσεων** είναι το πλέον συνηθισμένο για τις εφαρμογές ΑΤΜ

Μαθηματικό μοντέλο (3/5)

Τα μοντέλα μπορεί να είναι απλά, π.χ.

$$S_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$$

ή πιο σύνθετα, π.χ.

$$\begin{aligned}\Phi_i^k(t) = {} & \left\| \boldsymbol{r}^k(t-\tau_i^k) + \boldsymbol{\delta r}^k(t-\tau_i^k) - (\boldsymbol{r}_i(t) + \boldsymbol{\delta r}_i(t)) \right\| \\ & - I_i^k + T_i^k + \delta m_i^k + c\left[dt_i(t) - dt^k(t-\tau_i^k)\right] \\ & + c\left[\delta_i(t) + \delta^k(t-\tau_i^k)\right] + \lambda\left[\phi_i(t^o) - \phi^k(t^o)\right] \\ & + \lambda N_i^k + \varepsilon_i^k\end{aligned}$$

Μαθηματικό μοντέλο (4/5)

Η βασική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται όμως για τη συνόρθωση τους είναι, σε μεγάλο βαθμό, παρόμοια!

Μαθηματικό μοντέλο (5/5)

Το “ευθύ” πρόβλημα

Γνωστές τιμές παραμέτρων (**x**)

Εξισώσεις μαθηματικού μοντέλου

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Υπολογισμένες τιμές για τα παρατηρούμενα μεγέθη (**y**)

*Ύπαρξη **μοναδικής λύσης***

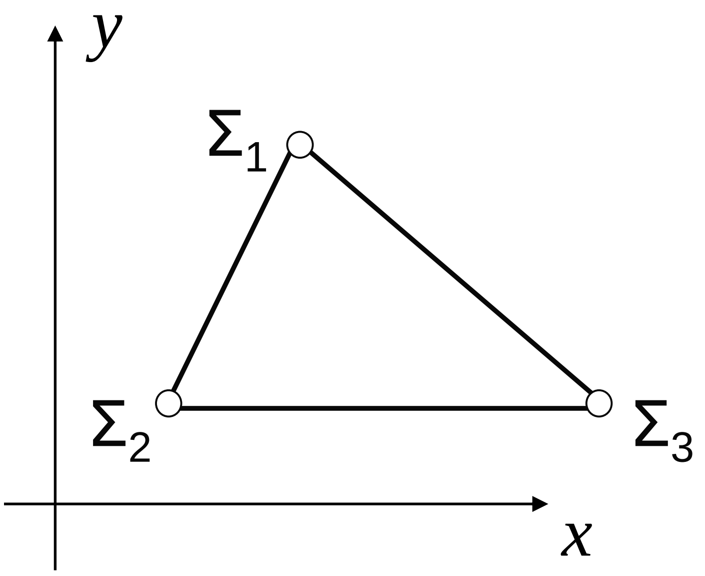
Παράδειγμα (1/3)

Από τις γνωστές συντεταγμένες τριών σημείων, να προσδιοριστούν τα μήκη όλων των πλευρών του σχηματιζόμενου τριγώνου

$$S_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$S_{13} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

$$S_{23} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$



Παράδειγμα (2/3)

Το “αντίστροφο” πρόβλημα

Γνωστές τιμές για τα παρατηρούμενα μεγέθη (**y**)

↓

Εξισώσεις μαθηματικού μοντέλου

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$$

↓

Υπολογισμένες τιμές παραμέτρων (**x**)

Μη-ύπαρξη ***μοναδικής λύσης***

(εκτός από πολύ ειδικές περιπτώσεις)

Παράδειγμα (3/3)

Από τις γνωστές τιμές για τα μήκη των πλευρών και τις γωνίες σε ένα τρίγωνο, να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των κορυφών του

$$S_{12} = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

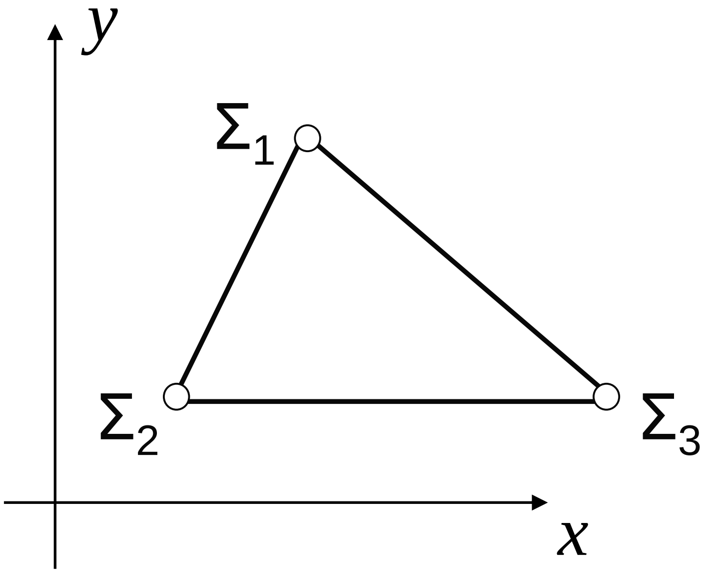
$$S_{13} = f(x_1, y_1, x_3, y_3)$$

$$S_{23} = f(x_2, y_2, x_3, y_3)$$

$$\omega_{123} = f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

$$\omega_{213} = f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

$$\omega_{321} = f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$



Μη-ύπαρξη ***μοναδικής λύσης***

«Αντίστροφα Προβλήματα»

Τα προβλήματα της μορφής: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ → $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ δεν έχουν συνήθως μία και μοναδική λύση.

Αυτό μπορεί να συμβαίνει για τους εξής λόγους:

- οι διαθέσιμες παρατηρήσεις είναι λιγότερες από τον απαιτούμενο αριθμό για τον προσδιορισμό των άγνωστων παραμέτρων **x**.
- οι διαθέσιμες παρατηρήσεις δεν περιέχουν ικανή πληροφορία για τον προσδιορισμό των άγνωστων παραμέτρων **x**.
- οι διαθέσιμες παρατηρήσεις δεν είναι συμβατές με το μαθηματικό μοντέλο **f**(**x**) του προβλήματος λόγω ύπαρξης διαφόρων σφαλμάτων.

Διεύρυνση Μοντέλου (1/2)

Στην πράξη οι **διαθέσιμες τιμές** των παρατηρούμενων μεγεθών δεν είναι συμβατές με το θεωρητικό μαθηματικό μοντέλο λόγω της ύπαρξης διαφόρων **σφαλμάτων**

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

↓

Απλουστευμένη περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας (θεωρητικό μοντέλο)

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}}$$

↓

Ρεαλιστική περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας

Διεύρυνση Μοντέλου (2/2)

$$\mathbf{y} \neq \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

Κανένα θεωρητικό μοντέλο δεν είναι τέλειο !

(ή μήπως, κανένα σετ μετρήσεων δεν είναι τέλειο;)

Η έννοια των σφαλμάτων

Η εισαγωγή του όρου **v** στο γενικό μαθηματικό μοντέλο:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

έχει τις εξής ερμηνείες:

- δεν μπορούμε να μετρήσουμε αυτό που απαιτεί το μοντέλο (***συστηματικά σφάλματα***)
- μπορούμε να μετρήσουμε αυτό που απαιτεί το μοντέλο, αλλά με κάποια αβεβαιότητα (***τυχαία σφάλματα***)
- χρησιμοποιούμε ένα απλουστευμένο μοντέλο (σε σχέση με τη συμπεριφορά των μετρήσεων) προκειμένου να προσδιορίσουμε μόνο την ***κυρίαρχη τάση*** των διαθέσιμων δεδομένων

Νέο «αντίστροφο» πρόβλημα

Γνωστές τιμές για τα παρατηρούμενα μεγέθη (**y**)

↓

Εξισώσεις διευρυμένου μαθηματικού μοντέλου

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

↓

Ύπαρξη ***άπειρων λύσεων***

Υπολογισμένες τιμές παραμέτρων (**x**) και σφαλμάτων (**v**)

Τι είναι η “συνόρθωση”;

Η συνόρθωση παρατηρήσεων είναι η διαδικασία εύρεσης **μίας μοναδικής λύσης** για τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων (**x**) που οδηγεί:

-σε μονοσήμαντη εκτίμηση των άγνωστων σφαλμάτων σύμφωνα με κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης

-σε νέες βελτιωμένες τιμές των παρατηρούμενων μεγεθών που είναι συμβατές με το θεωρητικό μοντέλο του προβλήματος

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \longrightarrow \begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \\ \downarrow \\ \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \downarrow \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{v}} \end{array}$$

Γραμμικοποίηση μοντέλου

Γραμμικοποίηση κατά Taylor

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o}) + \overbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{o}}^{\mathbf{A}} \overbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{o})}^{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}} + \ \ldots \ + \mathbf{v}$$

$$\underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o})}_{\mathbf{b}} \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \longrightarrow \boxed{\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v}}$$

(*) ο όρος **v** περιέχει τώρα
και σφάλματα γραμμικοποίησης

Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρύτατα στις φυσικές επιστήμες για την επίλυση συστημάτων της μορφής:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

σύμφωνα με το **κριτήριο βελτιστοποίησης**

$$\min_{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}} \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \min_{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}} \underbrace{(\mathbf{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x})}_{\phi(\boldsymbol{\delta}\mathbf{x})}$$

όπου **P** είναι ένας **πίνακας βάρους** που σχετίζεται με την ποιότητα των μετρήσεων και τη συνεισφορά τους στον υπολογισμό της τελικής λύσης

Λύση Ελαχίστων Τετραγώνων

Η εφαρμογή του κριτηρίου ελαχίστων τετραγώνων στο (γραμμικοποιημένο) σύστημα εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

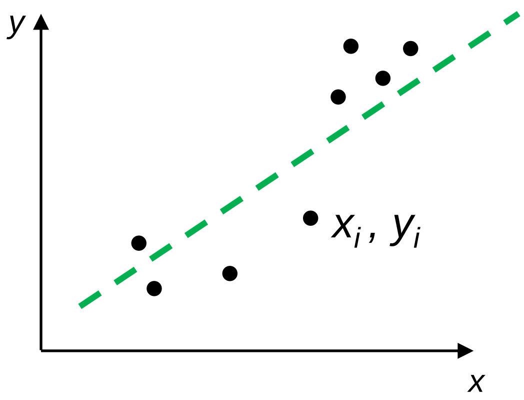
οδηγεί στο σύστημα **κανονικών εξισώσεων**

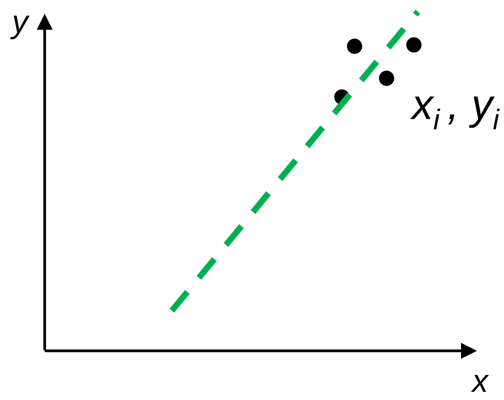
$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$

<u>Αν ο πίνακας **N** είναι αντιστρέψιμος</u>, τότε έχουμε την ακόλουθη βέλτιστη λύση

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

Παράδειγμα (1/3)

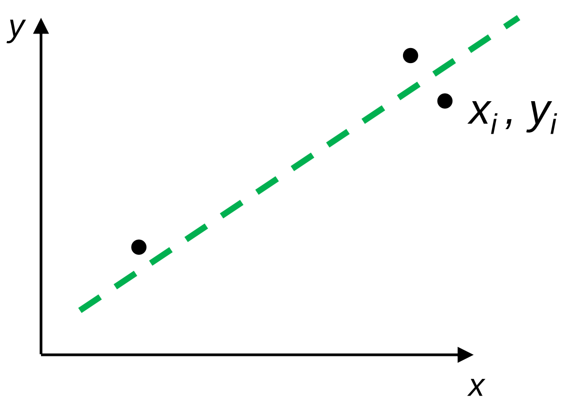




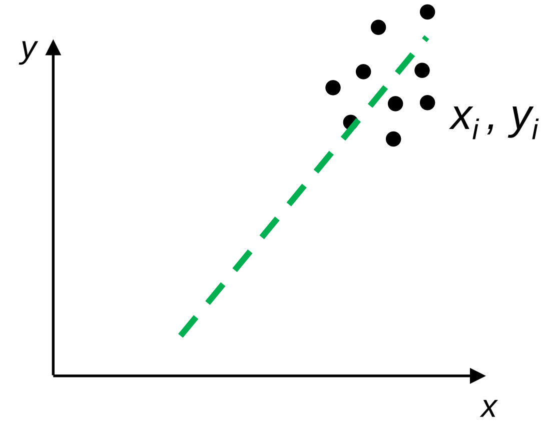
Ο πίνακας **N** αντιστρέφεται δύσκολα

$$y_i = a + b x_i + v_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Παράδειγμα (2/3)



Ο πίνακας **N**
αντιστρέφεται εύκολα

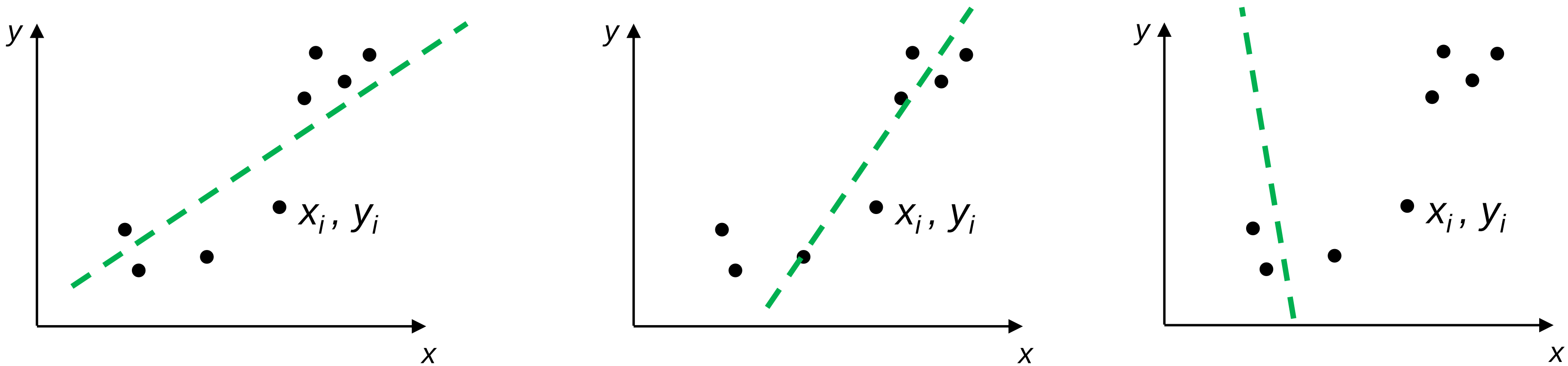


Ο πίνακας **N**
αντιστρέφεται δύσκολα

Βέλτιστη προσαρμογή ευθείας

$$y_i = a + b x_i + v_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Παράδειγμα (3/3)



P = I **P ≠ I** **P ≠ I**

Βέλτιστη προσαρμογή ευθείας

$$y_i = a + bx_i + v_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Σφάλματα και Πίνακας Βάρους

Πίνακας βάρους	*Γεωμετρική Ερμηνεία μεγέθους σφαλμάτων*	*Αξιολόγηση σφαλμάτων*
P = I	$\lVert \mathbf{v} \rVert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$	Όλες οι τιμές των σφαλμάτων έχουν την ίδια συνεισφορά στη μέτρηση του συνολικού μήκους του **v**
P ≠ I	$\lVert \mathbf{v} \rVert = \sqrt{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}$	Επιμέρους τιμές των σφαλμάτων έχουν διαφορετική συνεισφορά στη μέτρηση του συνολικού μήκους του **v**

Ανοιχτά ζητήματα

- Επιλογή πίνακα βάρους **P**
- Αξιολόγηση ποιότητας αποτελεσμάτων
- Εφαρμογή στατιστικών ελέγχων για διάφορες "μηδενικές υποθέσεις" σχετικά με το θεωρητικό μοντέλο του προβλήματος

Μέθοδος βέλτιστης στατιστικής εκτίμησης παραμέτρων (1/)

Ο βέλτιστος υπολογισμός των άγνωστων παραμέτρων του μαθηματικού μοντέλου

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

μπορεί να γίνει μέσω μιας στατιστικής μεθοδολογίας χρησιμοποιώντας κάποιο **στοχαστικό μοντέλο** για την συμπεριφορά των σφαλμάτων των μετρήσεων

$$E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C_v})$$

$$E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{C_v}$$

Μέθοδος βέλτιστης στατιστικής εκτίμησης παραμέτρων (2/)

Ο βέλτιστος υπολογισμός των άγνωστων παραμέτρων του μαθηματικού μοντέλου

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

μπορεί να γίνει μέσ ... λογίας χρησιμοποιώντας κ ... για την συμπεριφορά των σφαλμάτων των μετρήσεων

Δεν υπάρχουν συστηματικές επιδράσεις στα σφάλματα των μετρήσεων

$$\boxed{E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}}}$$

Περιγράφει το πιθανό μέγεθος και την συσχέτιση των τυχαίων σφαλμάτων στο σύνολο των μετρήσεων

Μέθοδος βέλτιστης στατιστικής εκτίμησης παραμέτρων (3/)

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\mathbf{v}})$$

Βέλτιστη γραμμική ανεπηρέαστη εκτίμηση (BLUE)

Γραμμική εκτίμηση: $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{b} + \mathbf{d}$

Ανεπηρέαστη εκτίμηση: $E\{\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}\} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$

Βέλτιστη εκτίμηση: $E\{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\} = E\{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_m^2\} = \min.$

$\mathbf{e} = \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} \longrightarrow$ σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων

Μέθοδος βέλτιστης στατιστικής εκτίμησης παραμέτρων (4/)

Ελαχιστοποίηση του **μέσου τετραγωνικού σφάλματος** για την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων

Είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση του ίχνους του πίνακα συμ-μεταβλ. των εκτιμήσεων των παραμέτρων

$$\text{trace}\,\mathbf{C}_{\delta\hat{\mathbf{x}}} = \min.$$

Βέλτιστη εκτίμηση: $E\{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\} = E\{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_m^2\} = \min.$

$\mathbf{e} = \delta\hat{\mathbf{x}} - \delta\mathbf{x} \longrightarrow$ σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων

Λύση BLUE

Η εφαρμογή της βέλτιστης γραμμικής ανεπηρέαστης εκτίμησης στο (γραμμικ.) σύστημα εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C_v})$$

οδηγεί στο σύστημα **κανονικών εξισώσεων**

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{C}_\mathbf{v}^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}_\mathbf{v}^{-1}\mathbf{b} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$

Αν ο πίνακας **N** είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε την ακόλουθη λύση

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}_\mathbf{v}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}_\mathbf{v}^{-1}\mathbf{b}$$

Γραμμικά Μοντέλα Gauss - Markov

Στα περισσότερα προβλήματα συνόρθωσης, το στοχαστικό μοντέλο των εξισώσεων παρατήρησης εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \underbrace{\sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{C_v}})$$

και οδηγεί στο σύστημα **κανονικών εξισώσεων**

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\mathbf{v}}^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\mathbf{v}}^{-1}\mathbf{b}$$

το οποίο είναι **ισοδύναμο** με το σύστημα

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

Τι είναι η μεταβλητότητα αναφοράς;

Η ποσότητα σ_o^2 ονομάζεται **a-priori μεταβλητότητα αναφοράς** (ή μεταβλητότητα της μονάδας βάρους)

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0},\ \underbrace{\sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{C_v}})$$

- Εκφράζει έναν (γνωστό ή άγνωστο) συντελεστή που καθορίζει την απόλυτη ακρίβεια των μετρήσεων
- Συνήθως, προσδιορίζεται μια a-posteriori εκτίμησή της με βάση τα αποτελέσματα της συνόρθωσης

Εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

Από τα αποτελέσματα της συνόρθωσης του μοντέλου

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

μπορεί να υπολογιστεί η εξής ανεπηρέαστη εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f\ (= n - m)}$$

Που χρειάζεται;

Χρήση της μεταβλητότητας αναφοράς (1/2)

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

- Χρησιμοποιείται στον **ολικό έλεγχο αξιοπιστίας** των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης.
- Χρησιμοποιείται συνήθως για την τελική αξιολόγηση της στατιστικής ακρίβειας των αποτελεσμάτων, π.χ.

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b} \qquad \mathbf{C}_{\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_o^2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

Χρήση της μεταβλητότητας αναφοράς (2/2)

Σε περιπτώσεις που έχουμε <u>ασυσχέτιστες παρατηρήσεις του ίδιου τύπου</u> και της <u>ίδιας ακρίβειας</u>, δηλαδή

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0},\ \sigma_o^2\,\mathbf{I})$$

τότε η a-posteriori μεταβλητότητα αναφοράς

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{v}}}{f}$$

αποτελεί μια ανεπηρέαστη εκτίμηση της ακρίβειας των διαθέσιμων μετρήσεων

Τι τιμές έχει η μεταβλητότητα αναφοράς και πως αξιολογούνται; (1/3)

- Συνήθως ο πίνακας βάρους **P** περιλαμβάνει όλη την διαθέσιμη πληροφορία για την στατιστική ακρίβεια των μετρήσεων

- Σε τέτοιες περιπτώσεις, η τιμή της μεταβλητότητας αναφοράς είναι θεωρητικά ίση με τη μονάδα

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1}) \qquad \sigma_o^2 = 1$$

- Η a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς θα είναι ίση (ή σχεδόν ίση) με τη μονάδα;

Τι τιμές έχει η μεταβλητότητα αναφοράς και πως αξιολογούνται; (2/3)

Η τιμή της a-posteriori εκτίμησης της μεταβλητότητας αναφοράς αναμένεται να είναι κοντά στην μονάδα όταν:

- Το στοχαστικό μοντέλο των παρατηρήσεων είναι ορθό (δηλ. ο πίνακας βάρους που χρησιμοποιείται στη συνόρθωση εκφράζει τις πραγματικές ακρίβειες των μετρήσεων)
- Τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι τυχαία (δηλ. δεν υπάρχουν χονδροειδή ή συστηματικά σφάλματα στις μετρήσεις ή άλλα σφάλματα «μοντέλου»).

Τι τιμές έχει η μεταβλητότητα αναφοράς και πως αξιολογούνται; (3/3)

Γενικά, πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές για την a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

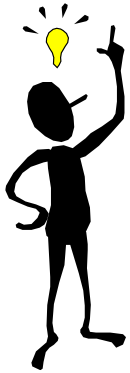
$$1 \ll \hat{\sigma}_o^2 \qquad\qquad \hat{\sigma}_o^2 \ll 1$$

μπορεί να οφείλονται

- σε μεγάλες τιμές των συνορθωμένων σφαλμάτων που δεν “δικαιολογούνται” από την ακρίβεια των μετρήσεων
- στη χρήση λανθασμένων βαρών για τις παρατηρήσεις

Συμπερασματικά

- Δεν είναι “υποχρεωτικό” για την τιμή της a-posteriori εκτίμησης της μεταβλητότητας αναφοράς να είναι κοντά στο 1!
- Αυτό που έχει σημασία είναι να αξιολογηθεί και να ελεγχθεί η τιμή της προκειμένου να γίνουν (αν χρειάζεται) οι απαραίτητες διορθώσεις στο αρχικό μοντέλο της συνόρθωσης!



Αξιολόγηση ακρίβειας συνόρθωσης (1/2)

- Γίνεται μέσω στατιστικών εργαλείων με χρήση **πινάκων συμ-μεταβλητοτήτων** για τα επιμέρους αποτελέσματα της συνόρθωσης
- *"Πως μεταδίδονται τα τυχαία σφάλματα των παρατηρήσεων στις τελικές εκτιμήσεις των παραμέτρων ή άλλων ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν ; "*
- Βασικό εργαλείο:
  Νόμος Μετάδοσης Συμ-μεταβλητοτήτων

Αξιολόγηση ακρίβειας συνόρθωσης (2/2)

$$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v}} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0},\ \sigma_o^2\,\mathbf{P}^{-1})$$

Αποτελέσματα

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{v}}$$

Ακρίβεια αποτελεσμάτων

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}} = \ldots \qquad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \ldots \qquad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \ldots$$

Τι είναι ο Νόμος Μετάδοσης Συμ-Μεταβλητοτήτων; (1/4)

Έστω ότι κάποιο μέγεθος υπολογίζεται μέσω γνωστής αναλυτικής σχέσης από κάποια άλλα μεγέθη

$$y = f(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Ζητείται ο υπολογισμός της ακρίβειας του *y*
με βάση την γνωστή ακρίβεια των στοιχείων του **x**

Τι είναι ο Νόμος Μετάδοσης Συμ-Μεταβλητοτήτων; (2/4)

$$y = f(\mathbf{x}) \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_y^2 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{a}$$

όπου το διάνυσμα **a** περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ ως προς τα στοιχεία του **x**, δηλαδή

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Τι είναι ο Νόμος Μετάδοσης Συμ-Μεταβλητοτήτων; (3/4)

Στη γενικότερη περίπτωση μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της ακρίβειας ενός *συνόλου μεγεθών* που υπολογίζονται μέσω γνωστών αναλυτικών σχέσεων από άλλα μεγέθη, δηλ.

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C_y} = \mathbf{A}\mathbf{C_x}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

όπου **A** είναι ο Ιακωβιανός πίνακας με στοιχεία

$$\mathbf{A}[i, j] = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

Τι είναι ο Νόμος Μετάδοσης Συμ-Μεταβλητοτήτων; (4/4)

Στη γενικότερη περίπτωση μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της ακρίβειας ενός *συνόλου μεγεθών* που υπολογίζονται μέσω γνωστών αναλυτικών σχέσεων από άλλα μεγέθη, δηλ.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{x}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

(*) για γραμμικές σχέσεις

Εφαρμογή στα αποτελέσματα συνόρθωσης

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \underbrace{\sigma_o^2 \mathbf{Q_v}}_{\mathbf{C_v}})$$

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

Σημ.

$$\mathbf{C_b} = \mathbf{C_v}$$

Η εφαρμογή του ΝΜΣ στην παραπάνω σχέση δίνει το αποτέλεσμα:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{C_v}\,\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

$$\alpha\nu \quad \mathbf{P} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}}^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

$$\alpha\nu \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_{\mathrm{o}}^2(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

Αξιολόγηση ακρίβειας (σχόλια)

$$\hat{x} \;=\; \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Τιμή εκτίμησης}} \;\pm\; \underbrace{\ldots\ldots}_{\sigma_{\hat{x}}}$$

Τιμή εκτίμησης

Τυπική απόκλιση εκτίμησης
(standard error)

"Ασφαλέστερη" αξιολόγηση ακρίβειας

$$\hat{x} \;=\; \ldots\ldots \;\pm\; 3\times \sigma_{\hat{x}}$$

επίπεδο ακρίβειας 3σ

Σχετική ακρίβεια εκτίμησης $\dfrac{\sigma_{\hat{x}}}{|\hat{x}|}$

Λίγα λόγια για τους Στατιστικούς Ελέγχους

Γενικά Σχόλια

- Η υλοποίηση της συνόρθωσης και η εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων με το μοντέλο των εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

δεν απαιτεί καμία γνώση της **συνάρτησης κατανομής** των τυχαίων σφαλμάτων.

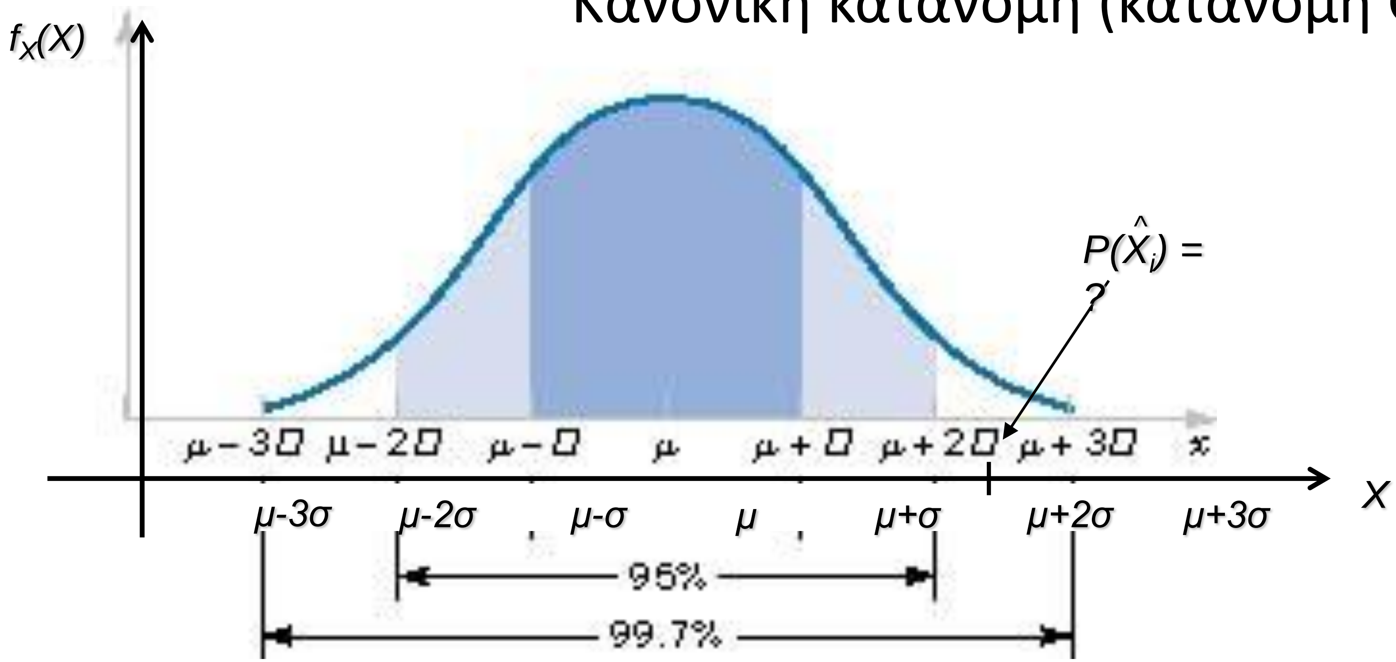
- Η συνάρτηση κατανομής του διανύσματος **v** και των διαφόρων ποσοτήτων που υπολογίζονται μέσω της συνόρθωσης είναι **απαραίτητη για την εκτέλεση στατιστικών ελέγχων** (ανάλυση αξιοπιστίας αποτελεσμάτων)

Τυχαία μεταβλητή X

Προσδοκία $E\{X\} = \mu$

Μεταβλητότητα $E\{(X\text{-}\mu)^2\} = \sigma^2$

Κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)



Από τις βέλτιστες εκτιμήσεις στους στατιστικούς ελέγχους …

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0},\ \sigma_o^2\,\mathbf{P}^{-1})$$

ΓΕΝΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ & ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P})\mathbf{v}$$

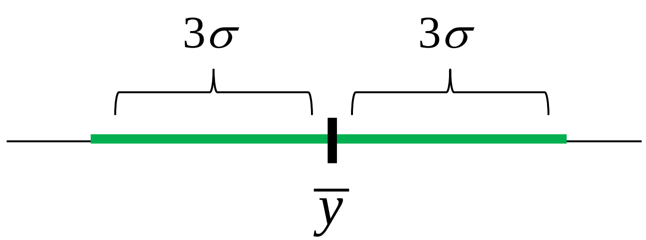
‘ΒΑΣΗ’ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ & ΜΕΛΕΤΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Ο απλούστερος στατιστικός έλεγχος

$$y_i = y + v_i \qquad v_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, .., n$$

Έλεγχος σφαλμάτων δείγματος (3-σ τεστ)

$$\bar{y} - 3\sigma < y_i < \bar{y} + 3\sigma$$



Γενικά Σχόλια

- Οι στατιστικοί έλεγχοι που γίνονται στα αποτελέσματα μιας συνόρθωσης αποσκοπούν στον έλεγχο ορθότητας για:
  - το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος (π.χ. ύπαρξη συστηματικών ή χονδροειδών σφαλμάτων)
  - το στοχαστικό μοντέλο του προβλήματος (π.χ. επιλογή πίνακα βάρους)
  - την εξωτερική πληροφορία που έχει τυχόν χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της συνόρθωσης
- Να θυμάστε ότι τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων **δεν συνιστούν "απόλυτες απαντήσεις"** – είναι απλά ενδείξεις με προκαθορισμένους συντελεστές εμπιστοσύνης/πιθανότητας !

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 4: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 5: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 6: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 7: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος>< πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χριστόφορος Κωτσάκης, «Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί, Ανασκόπηση Θεωρίας Συνορθώσεων και Εκτίμησης Παραμέτρων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευστάθιος Μπουχουράς

Θεσσαλονίκη,

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.