Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί

Ενότητα **10**: Αξιολόγηση ακρίβειας στη συνόρθωση δικτύων

Χριστόφορος Κωτσάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αξιολόγηση ακρίβειας στη συνόρθωση δικτύων

Περιεχόμενα ενότητας (1/2)

- Η έννοια της ακρίβειας για τα αποτελέσματα της συνόρθωσης δικτύων.
- Τι επηρεάζει την ακρίβεια δικτύου και με ποιο τρόπο μπορεί να αξιολογηθεί;
- Δομή του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων δικτύου.
- Η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων και των τυχαίων σφαλμάτων των ψευδο-παρατηρήσεων (παραδείγματα).

Περιεχόμενα ενότητας (2/2)

- Απόλυτες και σχετικές ελλείψεις σφάλματος/εμπιστοσύνης.
- Άλλοι δείκτες ακρίβειας για τα αποτελέσματα συνόρθωσης δικτύου.

Σκοποί ενότητας

- ***Η έννοια της ακρίβειας για τα αποτελέσματα της συνόρθωσης δικτύων. Τι επηρεάζει την ακρίβεια δικτύου και με ποιο τρόπο μπορεί να αξιολογηθεί; Δομή του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων δικτύου. Η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων και των τυχαίων σφαλμάτων των ψευδο-παρατηρήσεων (παραδείγματα). Απόλυτες και σχετικές ελλείψεις σφάλματος/εμπιστοσύνης. Άλλοι δείκτες ακρίβειας για τα αποτελέσματα συνόρθωσης δικτύου.***

Τίτλος και Αρίθμηση (1/5)

1. Ακρίβεια δικτύου
2. Τρόποι αξιολόγησης ακρίβειας
3. Ανάλυση ακρίβειας δικτύου
4. Τι επηρεάζει την ακρίβεια του δικτύου;
5. Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων
6. Γενικές σχέσεις για τον πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων

Τίτλος και Αρίθμηση (2/5)

7. Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων
8. Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων κατά τον ορισμό του ΣΑ
9. Παραδείγματα
10. Περίπτωση ολικών εσωτερικών δεσμεύσεων
11. Περίπτωση απολύτων δεσμεύσεων
12. Περίπτωση σταθερών προσεγγιστικών συντεταγμένων

Τίτλος και Αρίθμηση (3/5)

13. Άλλοι πίνακες συμ-μεταβλητοτήτων
14. Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων
15. Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων
16. Απόλυτες ελλείψεις σφάλματος
17. Απόλυτη έλλειψη σφάλματος
18. Έλλειψη σφάλματος/ εμπιστοσύνης

Τίτλος και Αρίθμηση (4/5)

19. Προσανατολισμός έλλειψης σφάλματος
20. Ειδικές περιπτώσεις
21. Παράδειγμα
22. Άλλοι σημαντικοί δείκτες 2Δ σημειακής ακρίβειας
23. Σχετικές Ελλείψεις Σφάλματος
24. Ακρίβεια «βάσης»
25. Σχετική έλλειψη σφάλματος

Τίτλος και Αρίθμηση (5/5)

26. Γραμμική ακρίβεια δικτύου
27. Ακρίβεια προσανατολισμού δικτύου
28. Υψομετρική ακρίβεια δικτύου
29. Ανάλυση ακρίβειας δικτύου
30. «Μέση» μεταβλητότητα σημείων δικτύου
31. «Γενικευμένη» μεταβλητότητα σημείων δικτύου
32. Ακρίβεια «χρήσης» του δικτύου

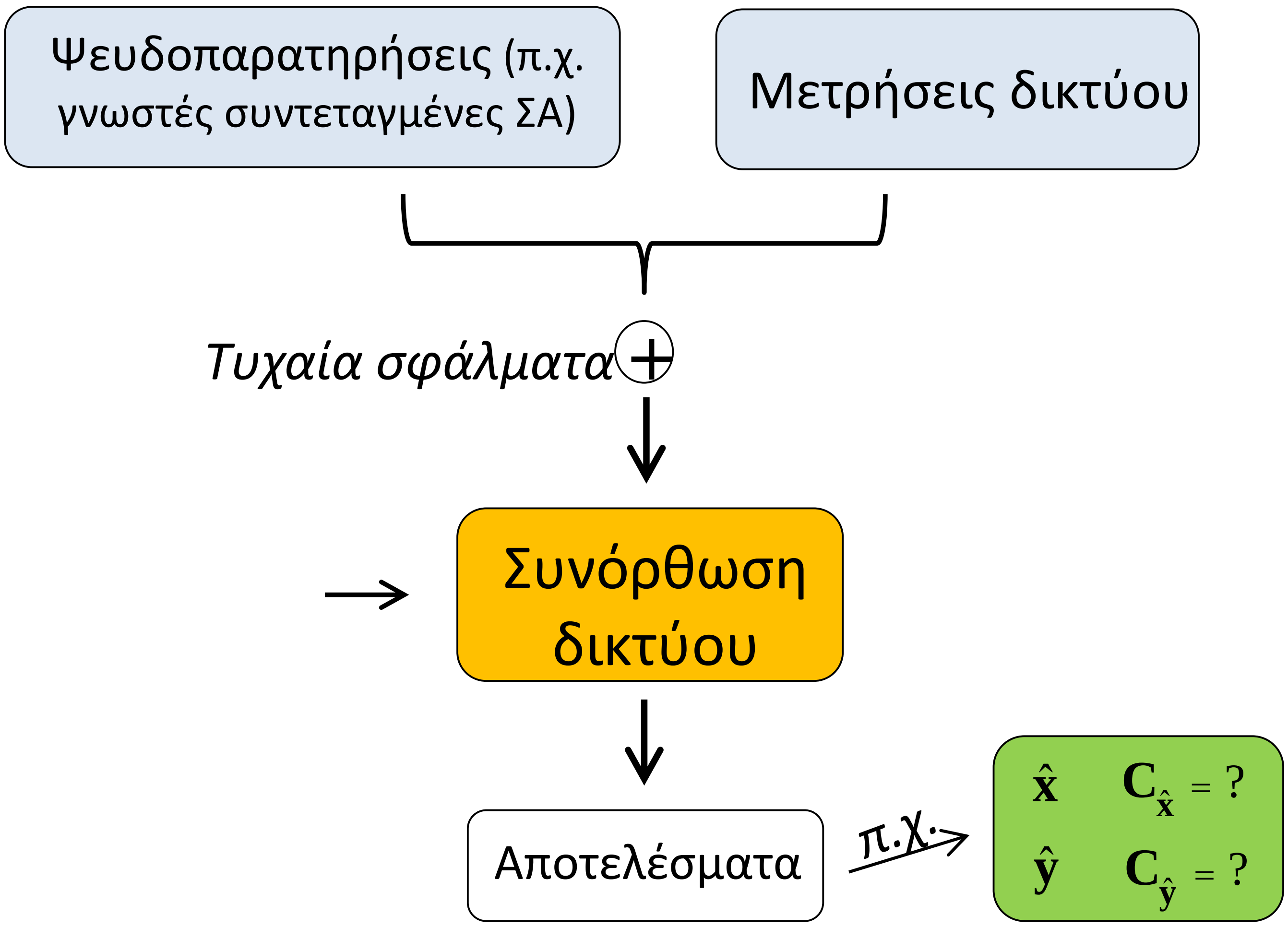
Ακρίβεια δικτύου (1/)

- Σχετίζεται με τη μελέτη της επίδρασης:
  - των τυχαίων σφαλμάτων των μετρήσεων, και
  - των τυχαίων σφαλμάτων των ψευδο-παρατηρήσεων
  - που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό του ΣΑ

στα **τελικά αποτελέσματα** της συνόρθωσης.

(π.χ. στις εκτιμήσεις των συντεταγμένων των κορυφών του και στις εκτιμήσεις των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του)

Ακρίβεια δικτύου (2/)



Ψευδοπαρατηρήσεις (π.χ. γνωστές συντεταγμένες ΣΑ)

Μετρήσεις δικτύου

Τυχαία σφάλματα +

Συνόρθωση δικτύου

Αποτελέσματα

π.χ.

$\hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = ?$

$\hat{\mathbf{y}} \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = ?$

Τρόποι αξιολόγησης ακρίβειας (1/)

- Η ακρίβεια μιας λύσης συνόρθωσης δικτύου μπορεί γενικά να προσδιορισθεί με:

Δείκτες απόλυτης ακρίβειας

- Τυπικές αποκλίσεις συνορθωμένων συντεταγμένων
- Απόλυτες ελλείψεις σφάλματος
- Δείκτες σημειακής 2Δ/3Δ ακρίβειας
- Τυπικές αποκλίσεις γεωμετρικών μεγεθών στο συνορθωμένο δίκτυο (π.χ. αποστάσεις)

Δείκτες σχετικής ακρίβειας

- Σχετικές ελλείψεις σφάλματος
- Σχετική γραμμική ακρίβεια (ακρίβεια κλίμακας δικτύου)

  $\sigma_{\hat{s}} / \hat{s}$ (ppm)
- Σχετική υψομετρική ακρίβεια

  $\sigma_{\Delta\hat{H}} / L$ (mm/km)

Τρόποι αξιολόγησης ακρίβειας (2/)

- Επίσης, μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε δείκτες αξιολόγησης της:
  - “Τοπικής ακρίβειας” δικτύου
  - “Μέσης ακρίβειας” δικτύου

Ανάλυση ακρίβειας δικτύου

- Βασική πηγή πληροφορίας για την ανάλυση ακρίβειας ενός δικτύου είναι ο **πίνακας συμμεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων** των κορυφών του.

$$(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})\,\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c}$$

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \delta\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\delta\hat{\mathbf{x}}} = ;$$

Τι επηρεάζει την ακρίβεια του δικτύου;

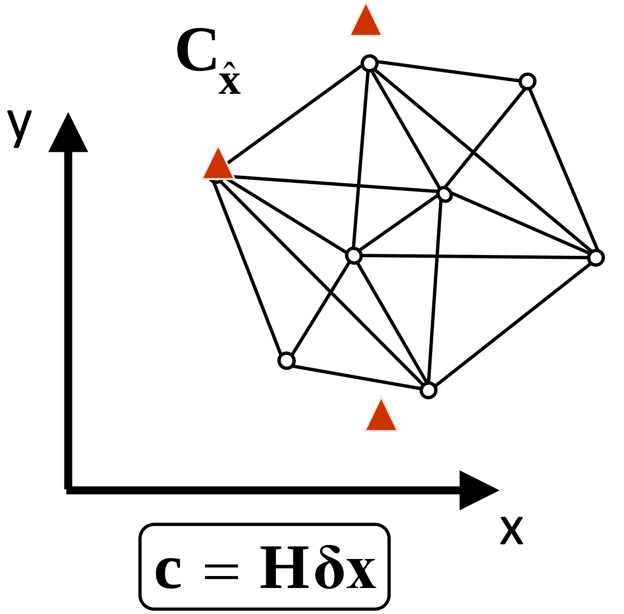
- Η ακρίβεια των μετρήσεων
- Η ακρίβεια των ψευδοπαρατηρήσεων (π.χ. αβεβαιότητα γνωστών συντ/νων σε σταθμούς αναφοράς)
- Η γεωμετρία του δικτύου
- Αριθμός/είδος/γεωμετρία μετρήσεων

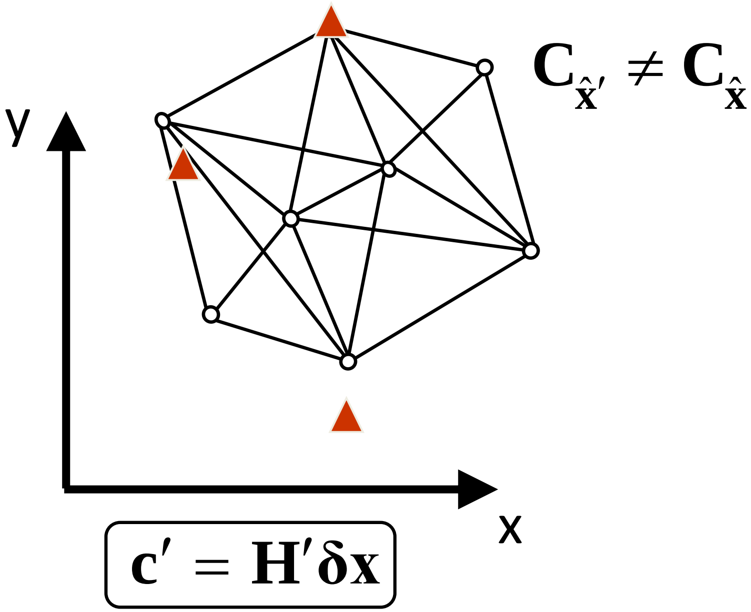
$\Big\}$ *Πίνακας σχεδιασμού δικτύου (**A**)*

- Τρόπος ορισμού του ΣΑ (τύπος δεσμεύσεων: ελάχιστες, εσωτερικές, πλεονάζουσες, απόλυτες ή χαλαρές, επιλογή σταθμών αναφοράς)

Να θυμάστε ότι ..

- Η ακρίβεια των **συντεταγμένων** σε ένα συνορθωμένο δίκτυο εξαρτάται από τον τρόπο υλοποίησης του ΣΑ!





- Δύο διαφορετικές λύσεις συνόρθωσης του ίδιου δικτύου θα έχουν διαφορετική ακρίβεια για τις συντεταγμένες τους

Ανάλυση ακρίβειας δικτύου (1/)

- Με βάση τον πίνακα μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν και άλλοι πίνακες συμμεταβλ., π.χ.
- Ακρίβεια συνορθωμένων παρατηρήσεων δικτύου

$$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

<u>ανώμαλος πίνακας</u>

- Πίνακας συμμεταβλ. συνορθωμένων σφαλμάτων

$$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \underbrace{\sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{C}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}}} - \mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

<u>ανώμαλος πίνακας</u>

Ανάλυση ακρίβειας δικτύου (2/)

- Με βάση τον πίνακα μ
  υπολογιστούν και άλλ
- Ακρίβεια συνορθωμέν

$$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

- Πίνακας συμμεταβλ. σ

$$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \underbrace{\sigma_{\mathrm{o}}^{2}\mathbf{P}^{-1}}_{\mathbf{C}_{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}}} - \mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

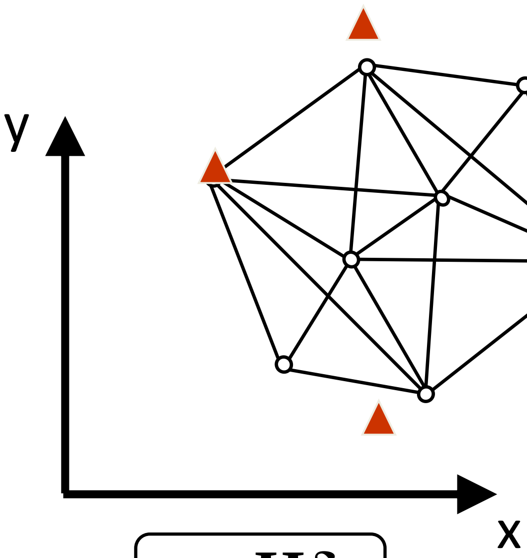
<u>ανώμαλος πίνακας</u>

Σε περίπτωση που υπάρχουν πρόσθετες παράμετροι στη συνόρθωση του δικτύου, οι συγκεκριμένοι τύποι είναι κάπως διαφορετικοί!

Βλέπε παράρτημα στο τέλος της παρουσίασης

Να θυμάστε ότι ..

Η ακρίβεια της συνορθωμένης γεωμετρικής μορφής ενός δικτύου δεν εξαρτάται από τον τρόπο υλοποίησης του ΣΑ όταν χρησιμοποιούνται ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΔΕΣΜΕΥΣΕΙΣ.

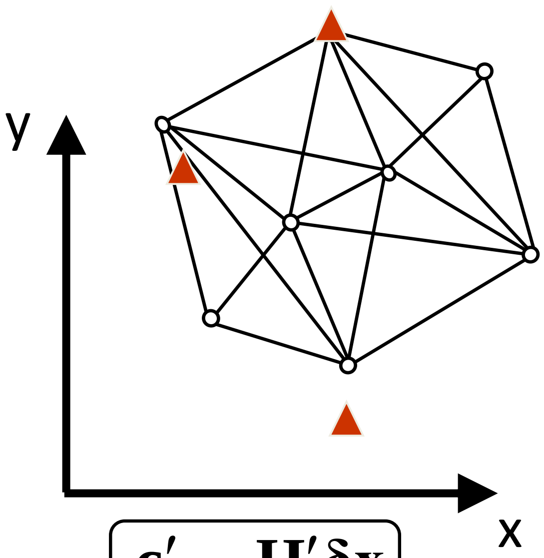


$$\mathbf{c} = \mathbf{H}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \neq \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}'}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}'}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}'}$$



$$\mathbf{c}' = \mathbf{H}'\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$$

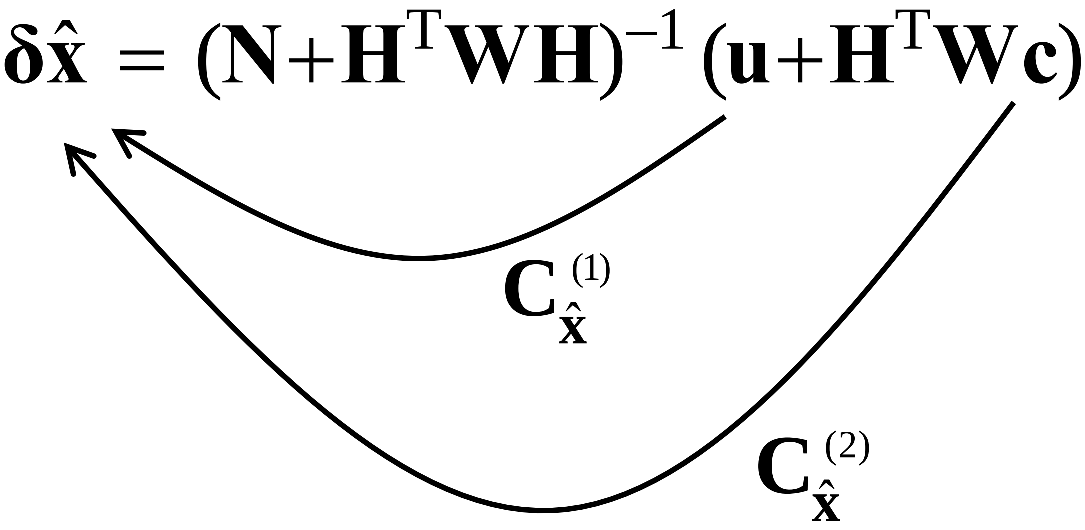
Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (1/)

- **Γενική μορφή:** $$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}}$$

$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$	Αντανακλά την ακρίβεια των συνορθωμένων συντεταγμένων εξαιτίας των τυχαίων σφαλμάτων των μετρήσεων (*data noise effect*)
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$	Αντανακλά την ακρίβεια των συνορθωμένων συντεταγμένων εξαιτίας των τυχαίων σφαλμάτων των ψευδοπαρατηρήσεων που συμμετέχουν στον ορισμό του ΣΑ (*datum noise effect*)

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (2/)

- **Γενική μορφή:** $\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}}$

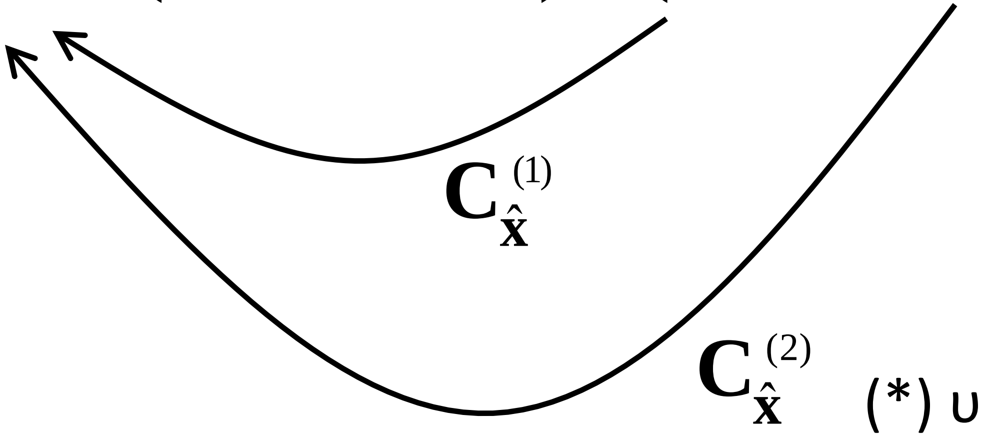


$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (3/)

- Γενική μορφή: $\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}}$

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$



(*) υφίσταται ακόμα και αν **c** = **0** !

Γενικές σχέσεις για τον πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των μετρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_o^2 (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων κατά τον ορισμό του ΣΑ

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\underbrace{\mathbf{C}_{\mathbf{c}}}_{\text{πίνακας συμ-μεταβλ. των ψευδοπαρατηρήσεων}})\mathbf{W}\mathbf{H}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

πίνακας συμ-μεταβλ. των ψευδοπαρατηρήσεων

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (1/)

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_{\mathrm{o}}^{2}\left(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{N}\left(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

- Ανώμαλος πίνακας !
- Είναι ο μόνος πίνακας συμ-μεταβλ. που υπολογίζεται από ορισμένα λογισμικά επίλυσης δικτύων (π.χ. DEROS)
- Δεν επηρεάζεται από τον πίνακα βάρους W (για ελάχιστες δεσμεύσεις)
- Επηρεάζεται από τον πίνακα βάρους W
  (για πλεονάζουσες δεσμεύσεις – “μικραίνει” όσο “μεγαλώνει” ο W)

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (2/)

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \underset{\uparrow}{\boxed{\sigma_o^2}}\,(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: συνήθως εφαρμόζεται κατάλληλο re-scaling μέσω της a posteriori εκτίμησης της μεταβλητότητας αναφοράς

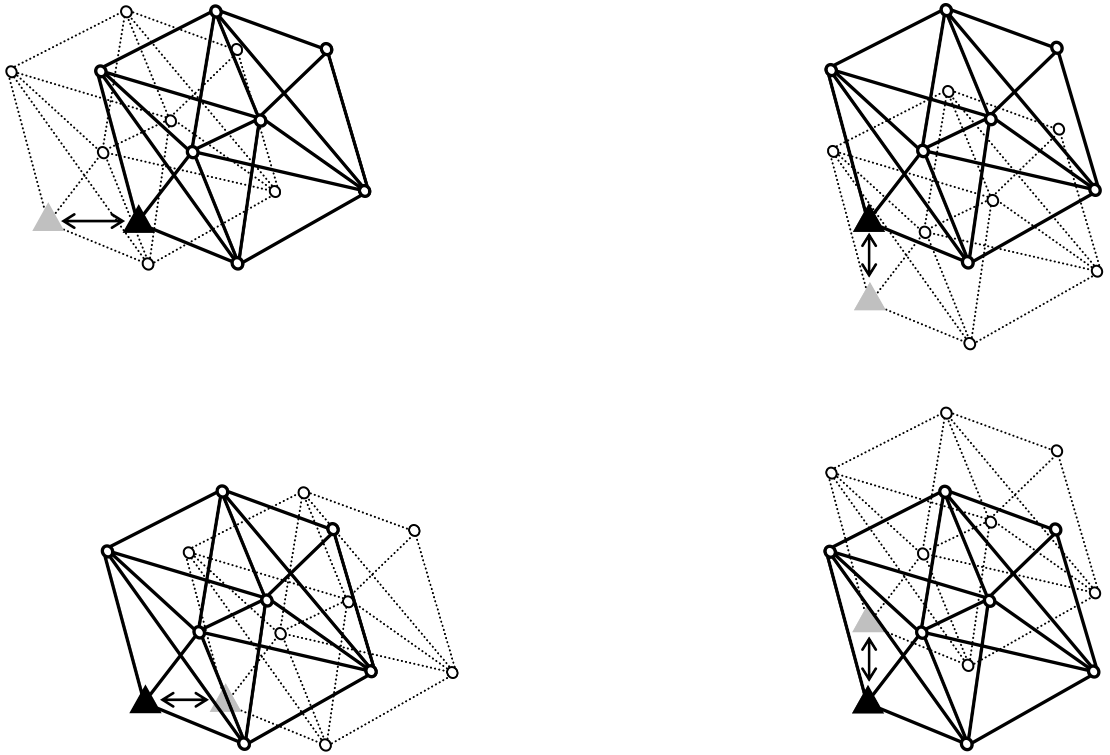
Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (3/)

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων κατά τον ορισμό του ΣΑ

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})\mathbf{W}\mathbf{H}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

- Ανώμαλος πίνακας !
- Η επίδραση του μπορεί να είναι σημαντική στην τελική ακρίβεια του δικτύου – αγνοείται σε περιπτώσεις ανεξάρτητων δικτύων
- Εξαρτάται από την πραγματική ακρίβεια των ψευδο-παρατηρήσεων (**C**$_c$) και από τον τρόπο εισαγωγής τους στη συνόρθωση (**W**)

Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων κατά τον ορισμό του ΣΑ

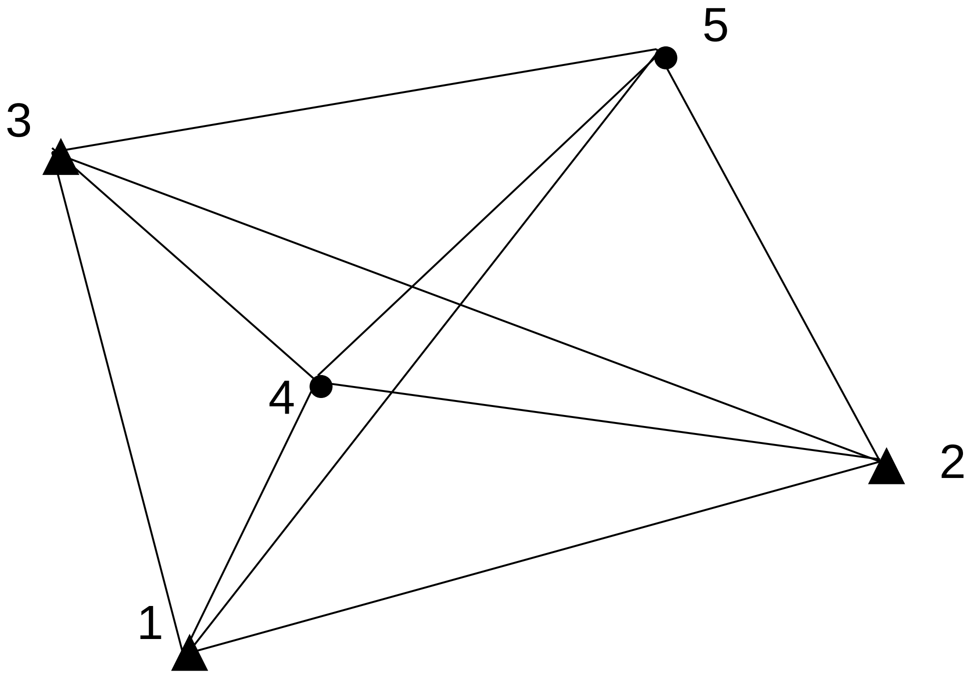


▲ ↔ ▲ Ακρίβεια τριγωνομετρικού σημείου
(‘αβεβαιότητα στον ορισμό του ΣΑ’)

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων (4/)

- Συνολική ακρίβεια δικτύου $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$
- Αντιστρέψιμος (ομαλός) πίνακας !
- Εκφράζει την ακρίβεια των εκτιμήσεων των συντ/νων ως προς το ΣΑ των σταθμών αναφοράς που χρησιμοποιήθηκαν στις δεσμεύσεις
- $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{N}$ ενδιαφέρον πρόβλημα που αντιμετωπίζεται για την αναλυση σύγχρονων γεωδαιτικών δικτύων

Παραδείγματα (1/)

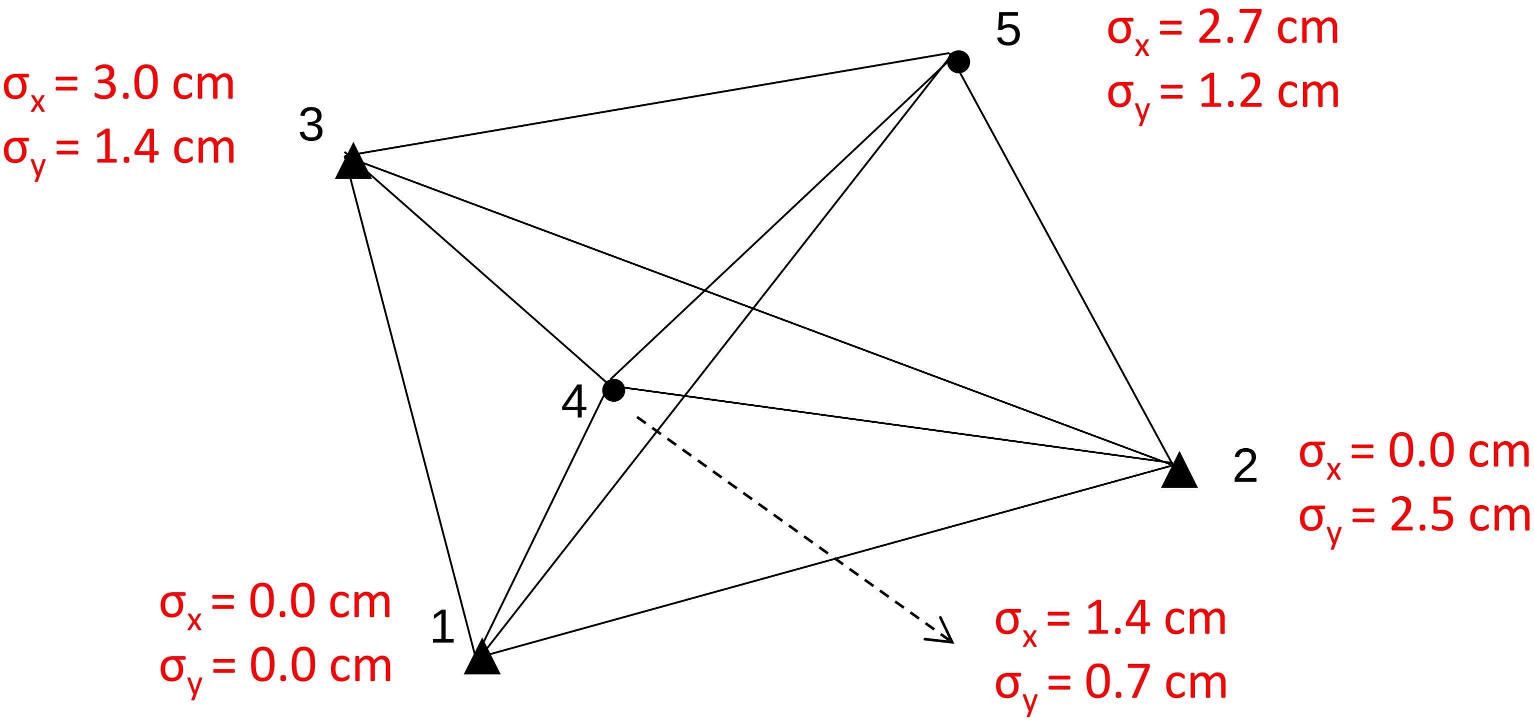


(*) Τα δεδομένα του δικτύου είναι παρόμοια με αυτά που δόθηκαν σε προηγούμενο παράδειγμα

(*) Τα σημεία 1, 2, 3 είναι γνωστοί ΣΑ – οι συντεταγμένες τους έχουν ακρίβεια ± 5 cm

(*) Η a-priori τυπ. απόκλιση αναφοράς των μετρήσεων σ_o θεωρείται γνωστή και ίση με 1

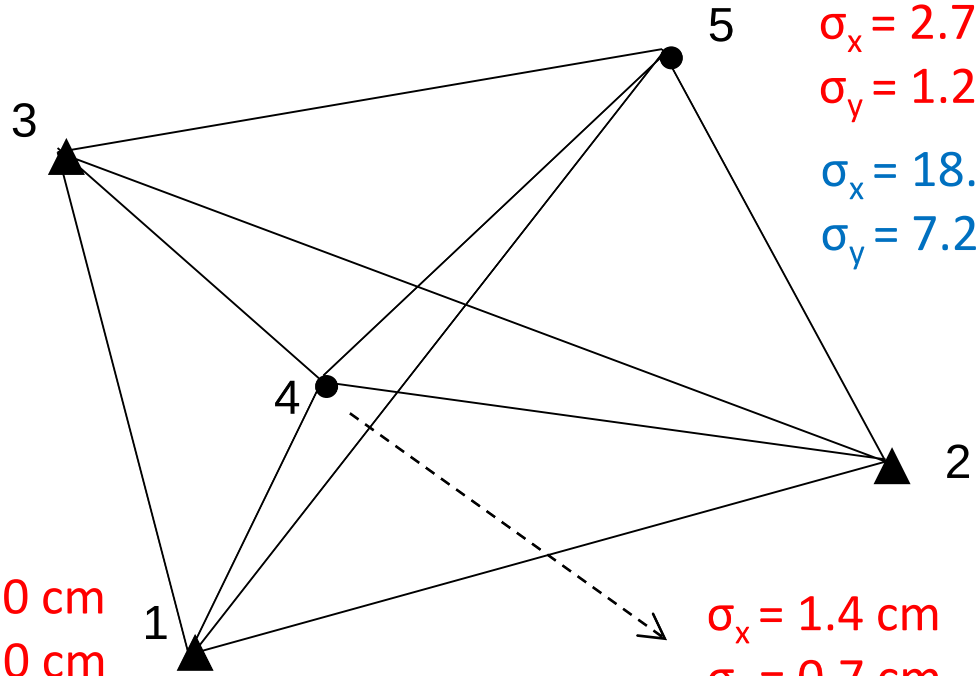
Παραδείγματα (2/)



Λύση I: x_1, y_1, x_2 σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$

Παραδείγματα (3/)



$\sigma_x = 3.0$ cm
$\sigma_y = 1.4$ cm

$\sigma_x = 17.9$ cm
$\sigma_y = 8.6$ cm

$\sigma_x = 2.7$ cm
$\sigma_y = 1.2$ cm

$\sigma_x = 18.83$ cm
$\sigma_y = 7.25$ cm

$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 2.5$ cm

$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 14.7$ cm

$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm

$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

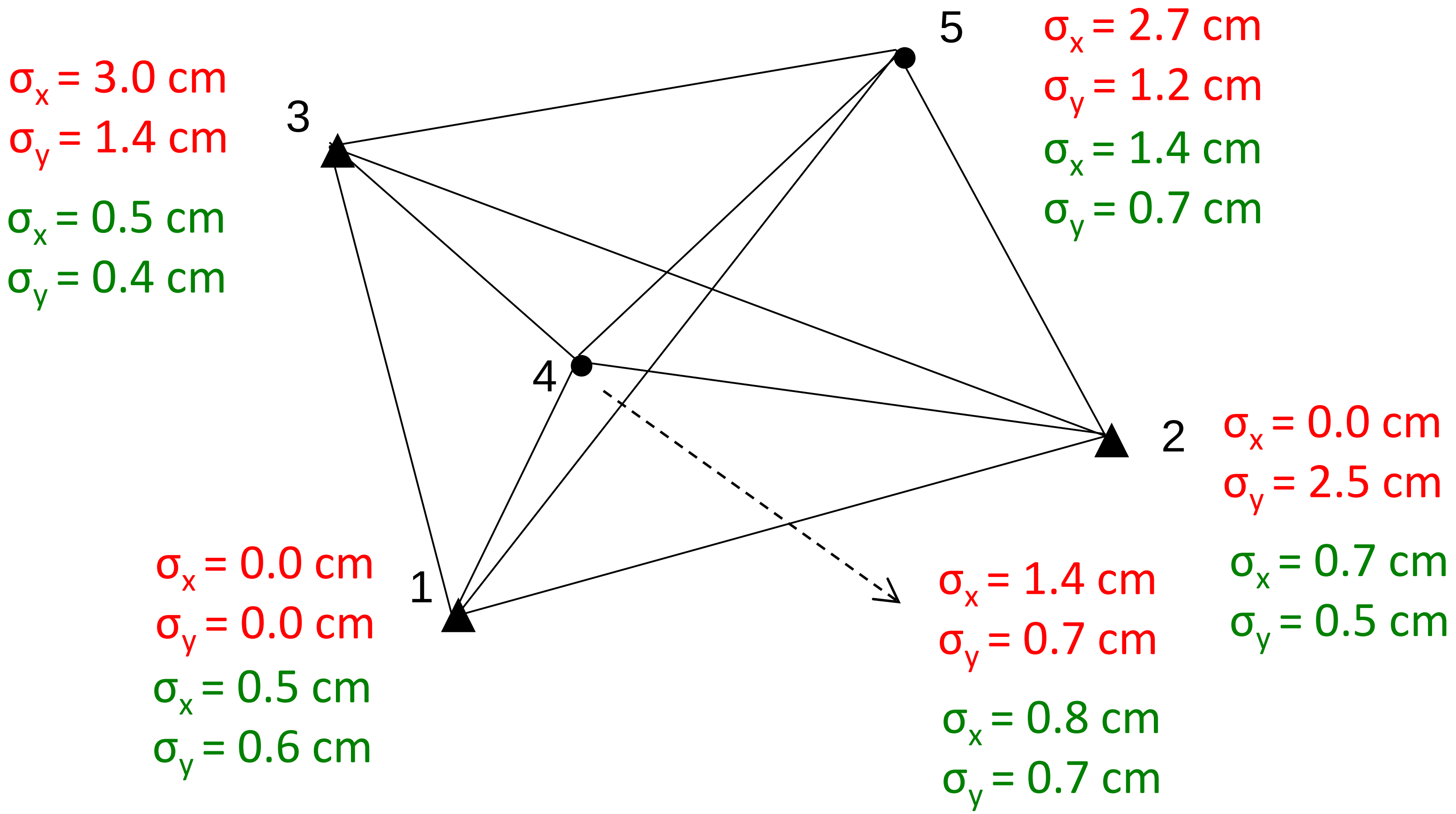
$\sigma_x = 1.4$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm

$\sigma_x = 10.0$ cm
$\sigma_y = 5.4$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2 σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$ **και** $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

Παραδείγματα (4/)



$\sigma_x = 3.0$ cm
$\sigma_y = 1.4$ cm
$\sigma_x = 0.5$ cm
$\sigma_y = 0.4$ cm

$\sigma_x = 2.7$ cm
$\sigma_y = 1.2$ cm
$\sigma_x = 1.4$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm

$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 2.5$ cm
$\sigma_x = 0.7$ cm
$\sigma_y = 0.5$ cm

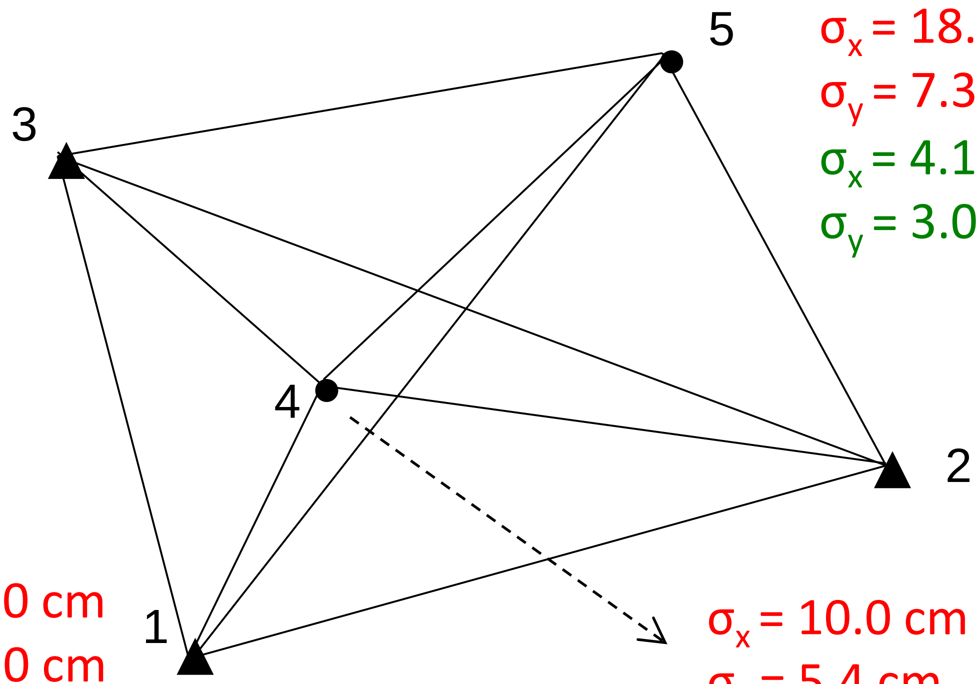
$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 0.5$ cm
$\sigma_y = 0.6$ cm

$\sigma_x = 1.4$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm
$\sigma_x = 0.8$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2 σταθερά

Λύση II: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις
(σημεία 1, 2, 3)

Παραδείγματα (5/)



σ_x = 17.9 cm
σ_y = 8.6 cm

σ_x = 4.0 cm
σ_y = 3.6 cm

σ_x = 18.8 cm
σ_y = 7.3 cm
σ_x = 4.1 cm
σ_y = 3.0 cm

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

σ_x = 5.0 cm
σ_y = 14.7 cm
σ_x = 2.9 cm
σ_y = 4.0 cm

σ_x = 5.0 cm
σ_y = 5.0 cm
σ_x = 3.6 cm
σ_y = 2.9 cm

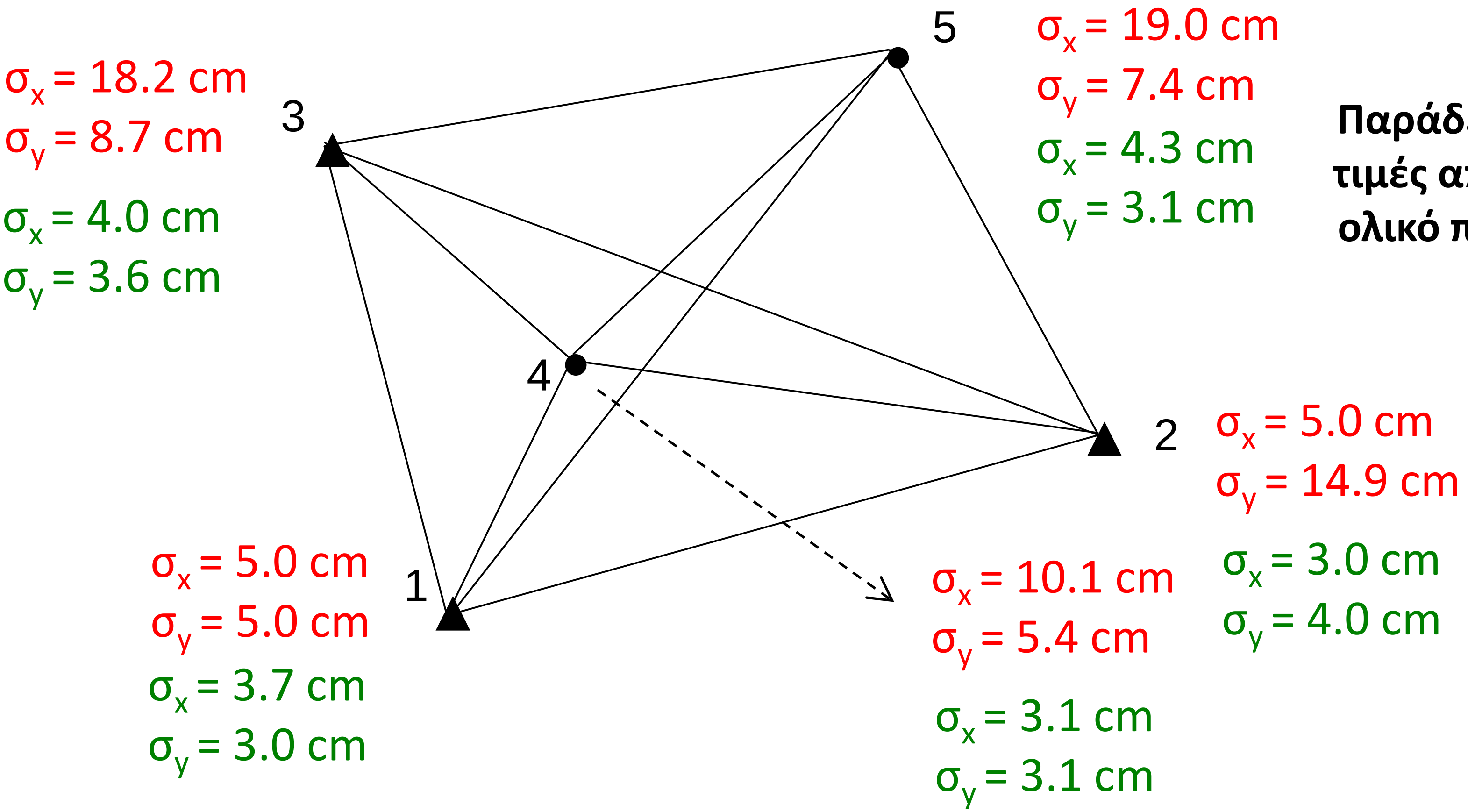
σ_x = 10.0 cm
σ_y = 5.4 cm

σ_x = 3.0 cm
σ_y = 3.1 cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2 σταθερά

Λύση II: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις
(σημεία 1, 2, 3)

Παραδείγματα (6/)



Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

Λύση I: x_1, y_1, x_2 σταθερά

Λύση II: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις
(σημεία 1, 2, 3)

Συμπέρασμα

Λύση μερικών εσωτερικών δεσμεύσεων

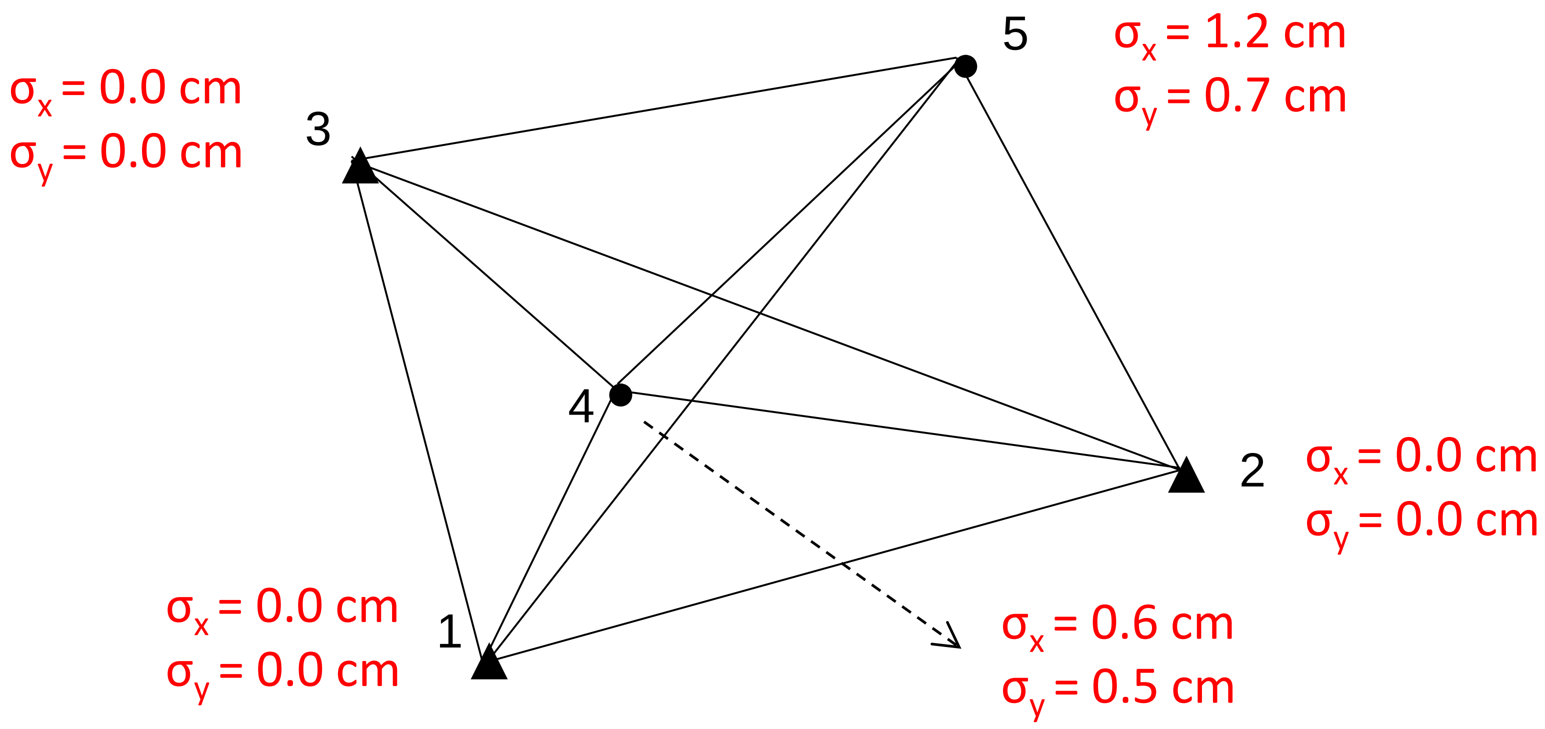
Λύση ελάχιστων σταθερών συντεταγμένων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} < \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)} << \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$$

(*) Η πρώτη λύση δίνει σημαντικά πιο ακριβή & “σταθερή” ένταξη του δικτύου στο ΣΑ που ορίζουν οι σταθμοί αναφοράς

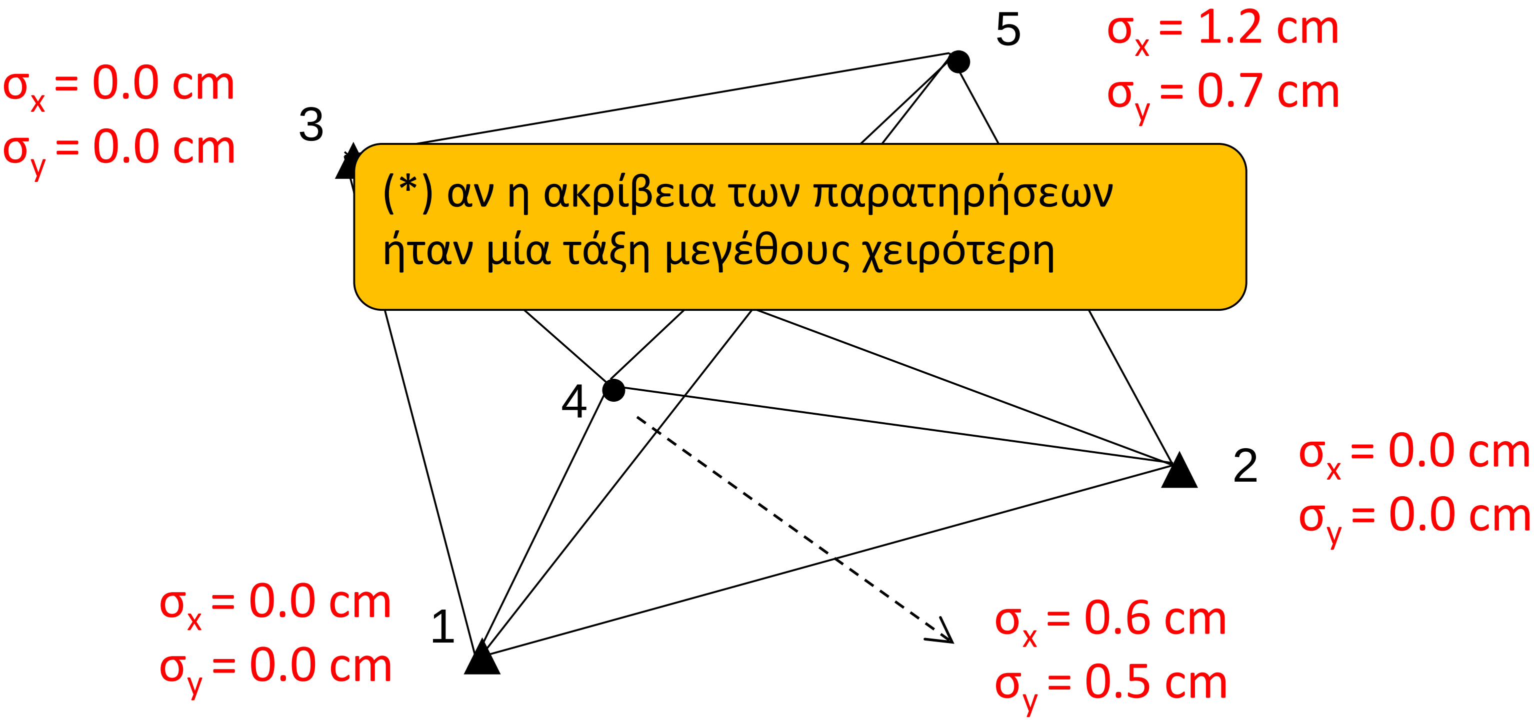
Παραδείγματα (7/)



Λύση Ι: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$

Παραδείγματα (8/)

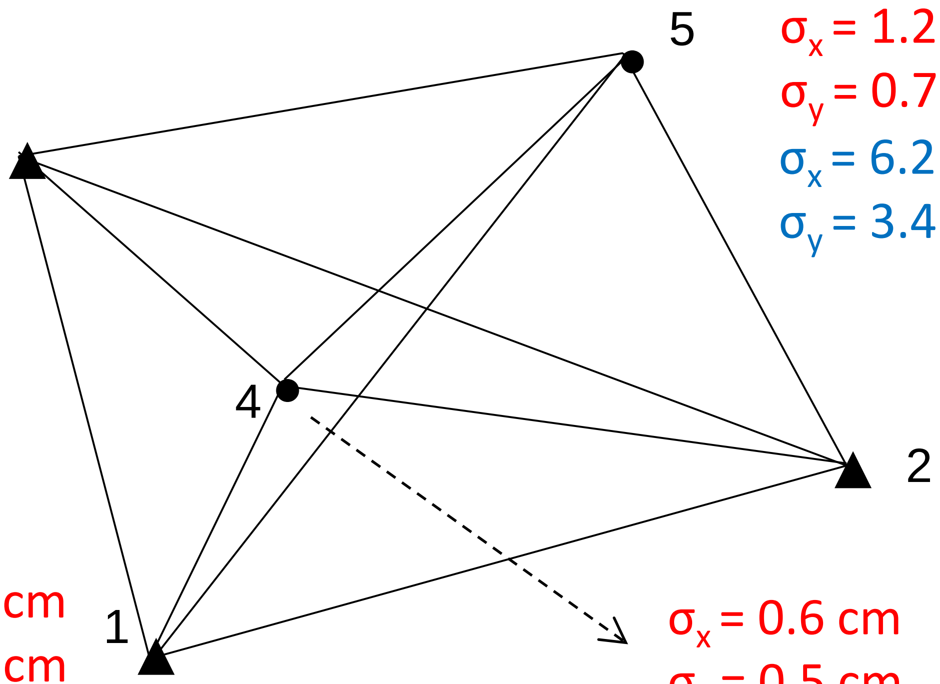


(*) αν η ακρίβεια των παρατηρήσεων ήταν μία τάξη μεγέθους χειρότερη

Λύση Ι: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$

Παραδείγματα (9/)



$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

$\sigma_x = 1.2$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm
$\sigma_x = 6.2$ cm
$\sigma_y = 3.4$ cm

$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

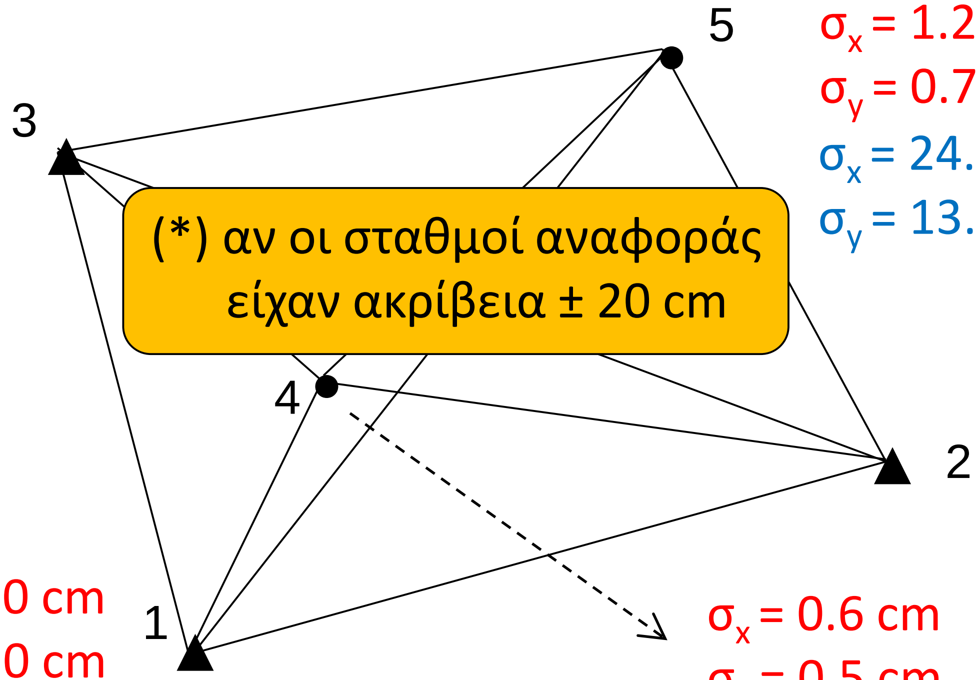
$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

$\sigma_x = 0.6$ cm
$\sigma_y = 0.5$ cm
$\sigma_x = 4.3$ cm
$\sigma_y = 3.9$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $C_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$ **και** $C_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

Παραδείγματα (10/)



$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm

$\sigma_x = 1.2$ cm
$\sigma_y = 0.7$ cm
$\sigma_x = 24.8$ cm
$\sigma_y = 13.8$ cm

(*) αν οι σταθμοί αναφοράς είχαν ακρίβεια ± 20 cm

$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm

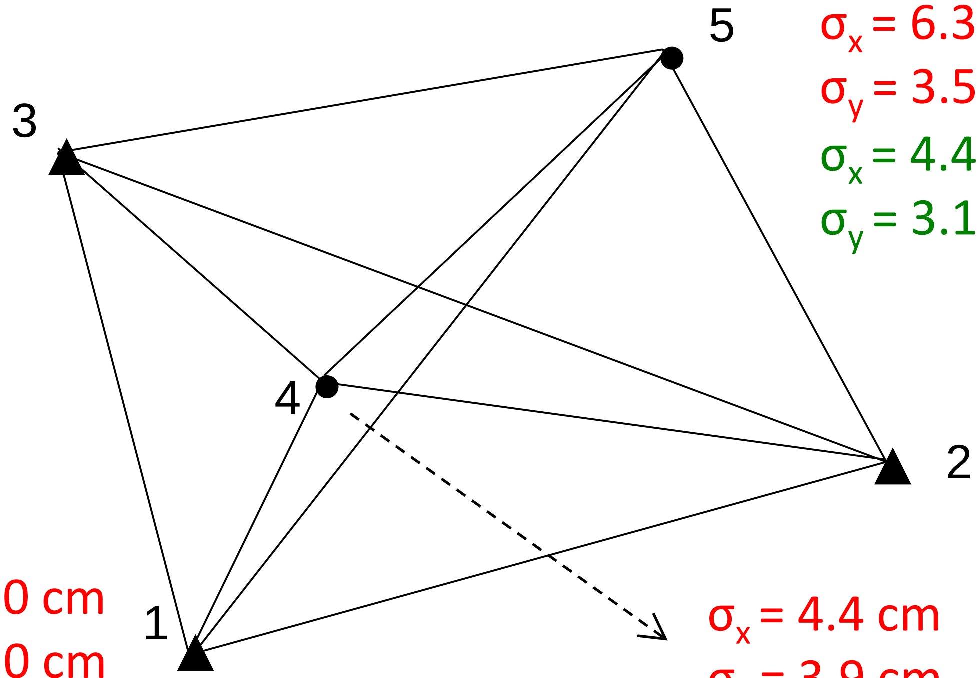
$\sigma_x = 0.0$ cm
$\sigma_y = 0.0$ cm
$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm

$\sigma_x = 0.6$ cm
$\sigma_y = 0.5$ cm
$\sigma_x = 17.2$ cm
$\sigma_y = 15.6$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

Παράδειγμα: τιμές από τον πίνακα $C_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$ **και** $C_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

Παραδείγματα (11/)



$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm
$\sigma_x = 4.0$ cm
$\sigma_y = 3.6$ cm

$\sigma_x = 6.3$ cm
$\sigma_y = 3.5$ cm
$\sigma_x = 4.4$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm
$\sigma_x = 3.0$ cm
$\sigma_y = 4.0$ cm

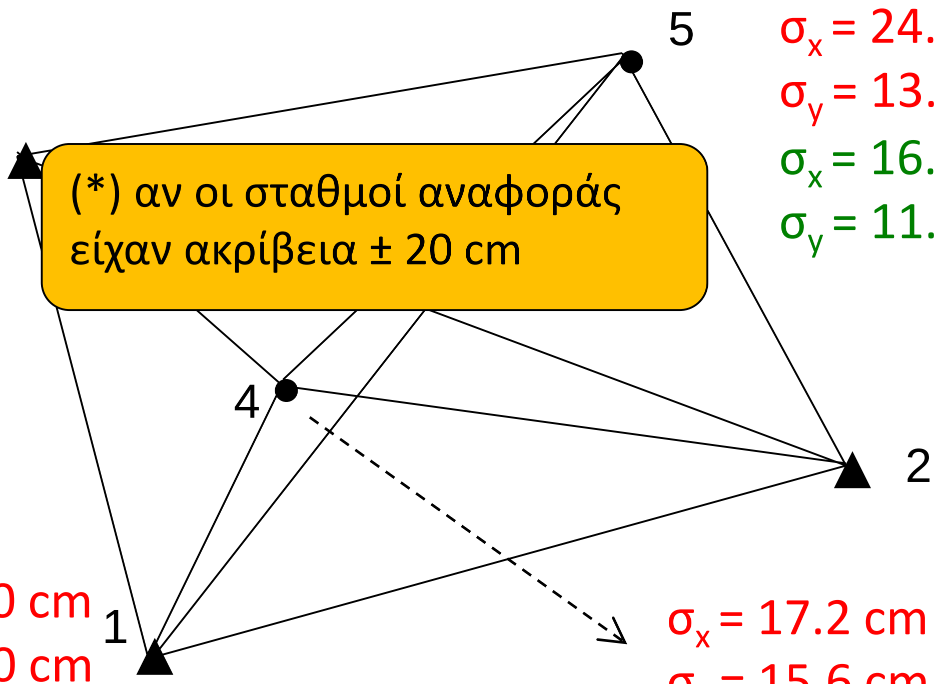
$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm
$\sigma_x = 3.7$ cm
$\sigma_y = 3.0$ cm

$\sigma_x = 4.4$ cm
$\sigma_y = 3.9$ cm
$\sigma_x = 3.1$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

Λύση II: ΠΔ με βάρη ($\mathbf{W} = \mathbf{C}_c^{-1}$)

Παραδείγματα (12/)



(*) αν οι σταθμοί αναφοράς είχαν ακρίβεια ± 20 cm

$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm
$\sigma_x = 15.9$ cm
$\sigma_y = 14.5$ cm

$\sigma_x = 24.9$ cm
$\sigma_y = 13.8$ cm
$\sigma_x = 16.6$ cm
$\sigma_y = 11.9$ cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm
$\sigma_x = 11.8$ cm
$\sigma_y = 15.9$ cm

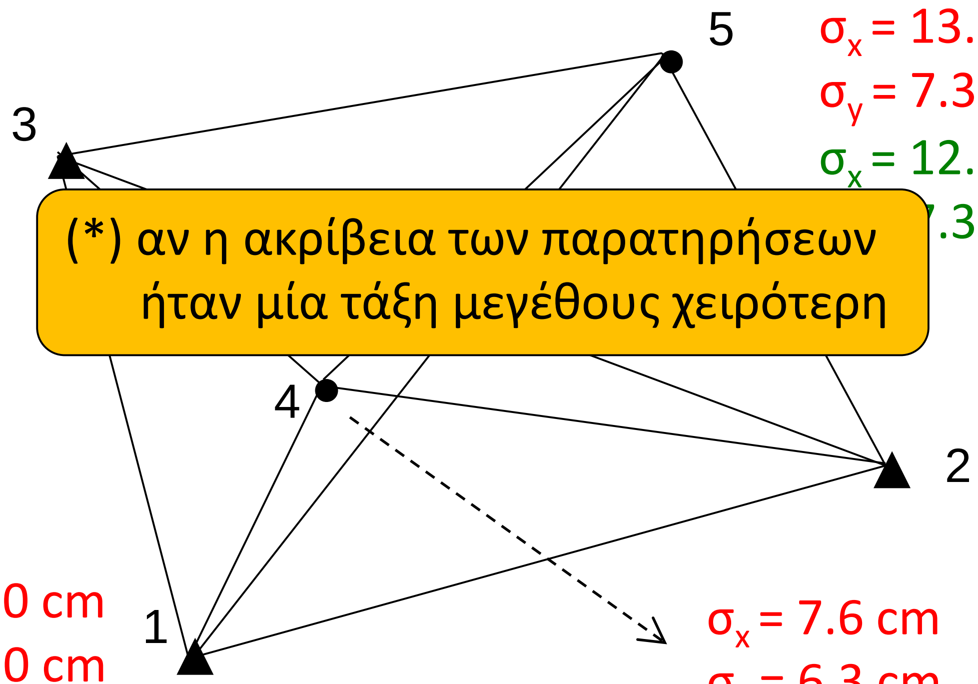
$\sigma_x = 20.0$ cm
$\sigma_y = 20.0$ cm
$\sigma_x = 14.5$ cm
$\sigma_y = 11.8$ cm

$\sigma_x = 17.2$ cm
$\sigma_y = 15.6$ cm
$\sigma_x = 12.0$ cm
$\sigma_y = 12.2$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

Λύση II: ΠΔ με βάρη ($\mathbf{W} = \mathbf{C}_c^{-1}$)

Παραδείγματα (13/)



$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

$\sigma_x = 4.7$ cm
$\sigma_y = 4.5$ cm

$\sigma_x = 13.0$ cm
$\sigma_y = 7.3$ cm

$\sigma_x = 12.8$ cm
.3 cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $C_{\hat{x}}$

(*) αν η ακρίβεια των παρατηρήσεων
ήταν μία τάξη μεγέθους χειρότερη

$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

$\sigma_x = 4.5$ cm
$\sigma_y = 4.8$ cm

$\sigma_x = 5.0$ cm
$\sigma_y = 5.0$ cm

$\sigma_x = 4.6$ cm
$\sigma_y = 4.4$ cm

$\sigma_x = 7.6$ cm
$\sigma_y = 6.3$ cm

$\sigma_x = 7.4$ cm
$\sigma_y = 6.2$ cm

Λύση I: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 σταθερά

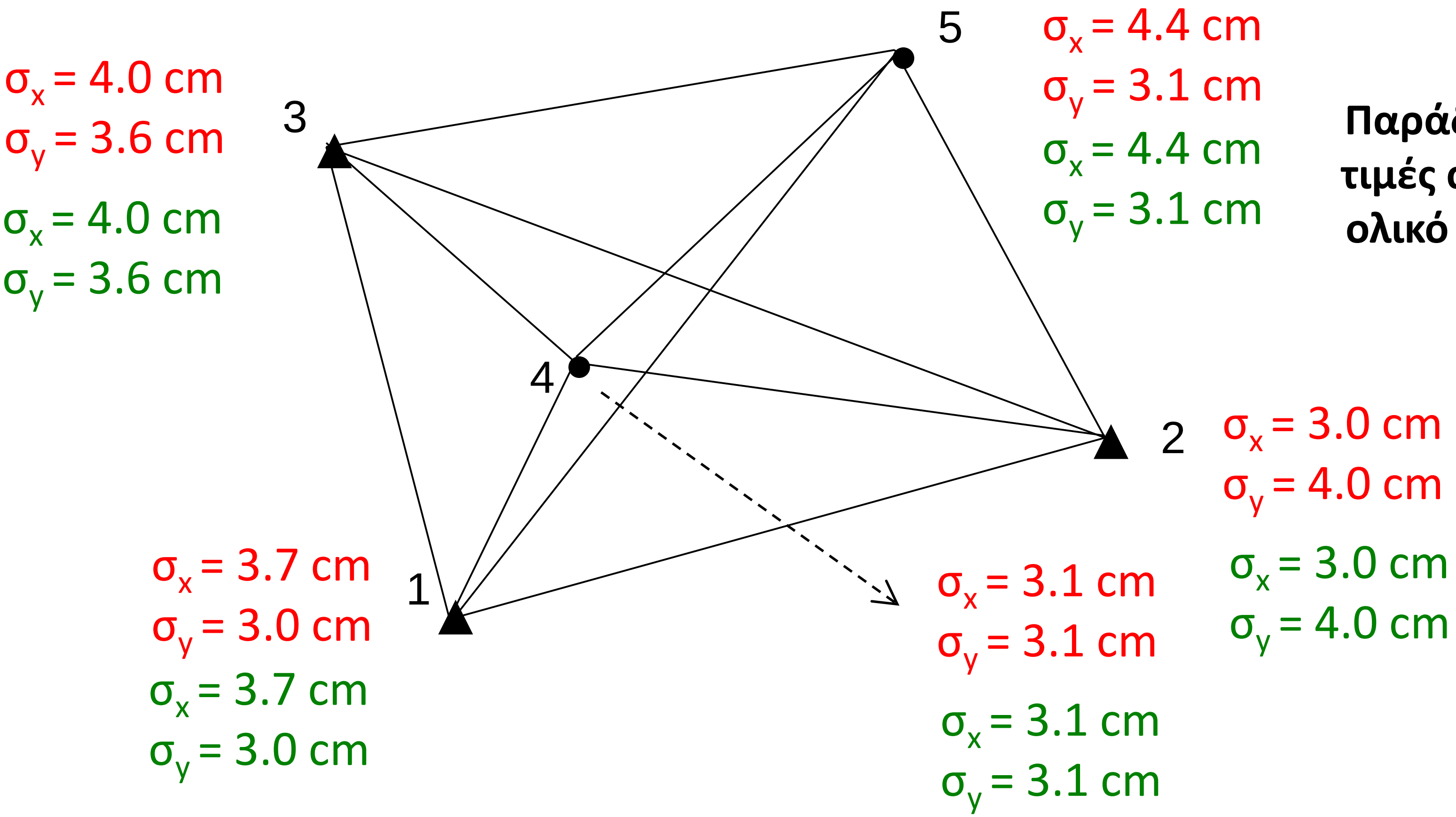
Λύση II: ΠΔ με βάρη ($\mathbf{W} = \mathbf{C}_c^{-1}$)

Συμπέρασμα

Λύση πλεοναζουσών εσωτερικών δεσμεύσεων		Λύση απόλυτων πλεοναζουσών συντεταγμένων
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$	$<$	$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$	$<<$	$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

(*) Η πρώτη λύση ελέγχει & ελαχιστοποιεί καλύτερα την επίδραση των σφαλμάτων που υπάρχουν στις συντεταγμένες των ΣΑ του δικτύου

Παραδείγματα (14/)



Σημείο 3:
$\sigma_x = 4.0$ cm
$\sigma_y = 3.6$ cm
$\sigma_x = 4.0$ cm
$\sigma_y = 3.6$ cm

Σημείο 5:
$\sigma_x = 4.4$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm
$\sigma_x = 4.4$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm

Σημείο 2:
$\sigma_x = 3.0$ cm
$\sigma_y = 4.0$ cm
$\sigma_x = 3.0$ cm
$\sigma_y = 4.0$ cm

Σημείο 1:
$\sigma_x = 3.7$ cm
$\sigma_y = 3.0$ cm
$\sigma_x = 3.7$ cm
$\sigma_y = 3.0$ cm

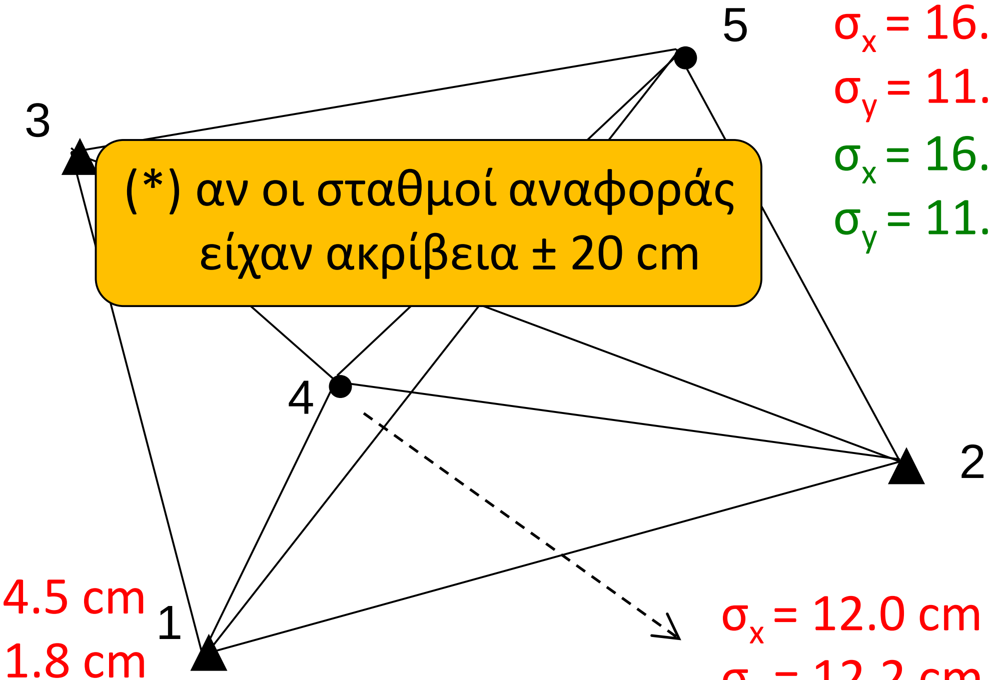
Σημείο 4:
$\sigma_x = 3.1$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm
$\sigma_x = 3.1$ cm
$\sigma_y = 3.1$ cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

Λύση I: ΠΔ με βάρη ($\mathbf{W} = \mathbf{C}_c^{-1}$)

Λύση II: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις (σημεία 1, 2, 3)

Παραδείγματα (15/)



(*) αν οι σταθμοί αναφοράς είχαν ακρίβεια ± 20 cm

$\sigma_x = 15.9$ cm
$\sigma_y = 14.5$ cm

$\sigma_x = 15.9$ cm
$\sigma_y = 14.5$ cm

$\sigma_x = 16.6$ cm
$\sigma_y = 11.9$ cm

$\sigma_x = 16.6$ cm
$\sigma_y = 11.9$ cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$\sigma_x = 11.8$ cm
$\sigma_y = 15.9$ cm

$\sigma_x = 11.8$ cm
$\sigma_y = 15.8$ cm

$\sigma_x = 14.5$ cm
$\sigma_y = 11.8$ cm

$\sigma_x = 14.5$ cm
$\sigma_y = 11.8$ cm

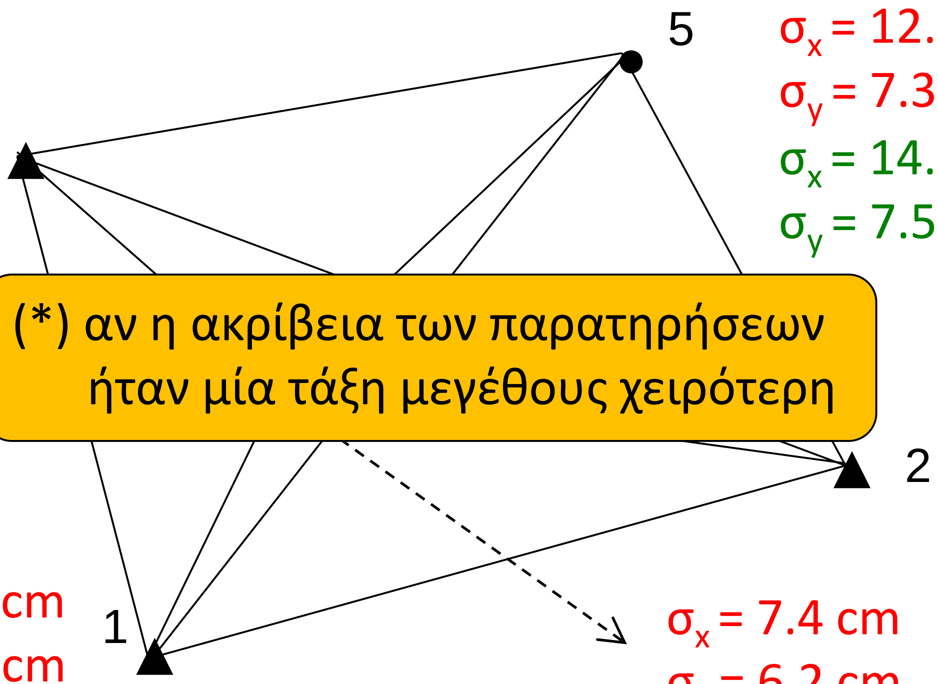
$\sigma_x = 12.0$ cm
$\sigma_y = 12.2$ cm

$\sigma_x = 12.0$ cm
$\sigma_y = 12.2$ cm

<u>Λύση I</u>: ΠΔ με βάρη (**W** = $\mathbf{C}_c^{-1}$)

<u>Λύση II</u>: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις (σημεία 1, 2, 3)

Παραδείγματα (16/)



$\sigma_x = 4.7$ cm
$\sigma_y = 4.5$ cm

$\sigma_x = 6.5$ cm
$\sigma_y = 5.5$ cm

$\sigma_x = 12.8$ cm
$\sigma_y = 7.3$ cm

$\sigma_x = 14.6$ cm
$\sigma_y = 7.5$ cm

Παράδειγμα: τιμές από τον ολικό πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

(*) αν η ακρίβεια των παρατηρήσεων ήταν μία τάξη μεγέθους χειρότερη

$\sigma_x = 4.5$ cm
$\sigma_y = 4.8$ cm

$\sigma_x = 7.3$ cm
$\sigma_y = 6.7$ cm

$\sigma_x = 4.6$ cm
$\sigma_y = 4.4$ cm

$\sigma_x = 6.5$ cm
$\sigma_y = 6.6$ cm

$\sigma_x = 7.4$ cm
$\sigma_y = 6.2$ cm

$\sigma_x = 8.8$ cm
$\sigma_y = 7.3$ cm

Λύση I: ΠΔ με βάρη ($\mathbf{W} = \mathbf{C}_c^{-1}$)

Λύση II: μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις (σημεία 1, 2, 3)

Συμπέρασμα

Λύση μερικών εσωτερικών δεσμεύσεων		Λύση πλεοναζουσών δεσμεύσεων με βάρη
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$	$\approx$	$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$	$\approx$	$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}$

(*) Η δεύτερη λύση ελέγχει και ελαχιστοποιεί κάπως καλύτερα την επίδραση των σφαλμάτων που υπάρχουν στις παρατηρήσεις του δικτύου

Παράρτημα αναλυτικών σχέσεων για ειδικές περιπτώσεις

Περίπτωση ολικών εσωτερικών δεσμεύσεων

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_o^2 (\mathbf{N}+\mathbf{E}^T\mathbf{E})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{E}^T\mathbf{E})^{-1} = \sigma_o^2 \mathbf{N}^+$$

- Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει:

$$\boxed{\text{trace } \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \min.}$$

ανάμεσα σε οποιαδήποτε άλλη λύση ελαχίστων δεσμεύσεων για το ίδιο δίκτυο

Περίπτωση απολύτων δεσμεύσεων

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_o^2 (\mathbf{N}+\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

- Αν **W** → ∞ τότε θα έχουμε

$$\boxed{\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_o^2 (\mathbf{N}+\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}}$$

ελάχιστες δεσμεύσεις

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_o^2 (\mathbf{R}^{-1}-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}) \\ \mathbf{R} = \mathbf{N}+\mathbf{H}^T\mathbf{H} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\end{gathered}}$$

πλεονάζουσες δεσμεύσεις

Περίπτωση σταθερών προσεγγιστικών συντεταγμένων

- Επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_{\text{o}}^2 (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}$$

- Όταν το ΣΑ του δικτύου ορίζεται μέσω **σταθερών συντ/νων** σε επιλεγμένους σταθμούς αναφοράς, δηλαδή

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \hdashline (\mathbf{N}_{12})^{\mathrm{T}} & \mathbf{N}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta\hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hdashline \delta\hat{\mathbf{x}}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \hdashline \mathbf{u}_2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = \sigma_{\text{o}}^2 \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{N}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\delta\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} \to \infty}$$

Άλλοι πίνακες συμ-μεταβλητοτήτων

- Σε περίπτωση που συμμετέχουν πρόσθετες παράμετροι στη συνόρθωση του δικτύου, δηλαδή

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{q} \end{bmatrix} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

- Θα έχουμε

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \sigma_o^2 \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^T + \mathbf{M}(\mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T)\mathbf{M}^T$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \underbrace{\sigma_o^2 \mathbf{P}}_{\mathbf{C_y} = \mathbf{C_v}}{}^{-1} - \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}}$$

Συνεχίζεται….

Πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων συνορθωμένων συντεταγμένων

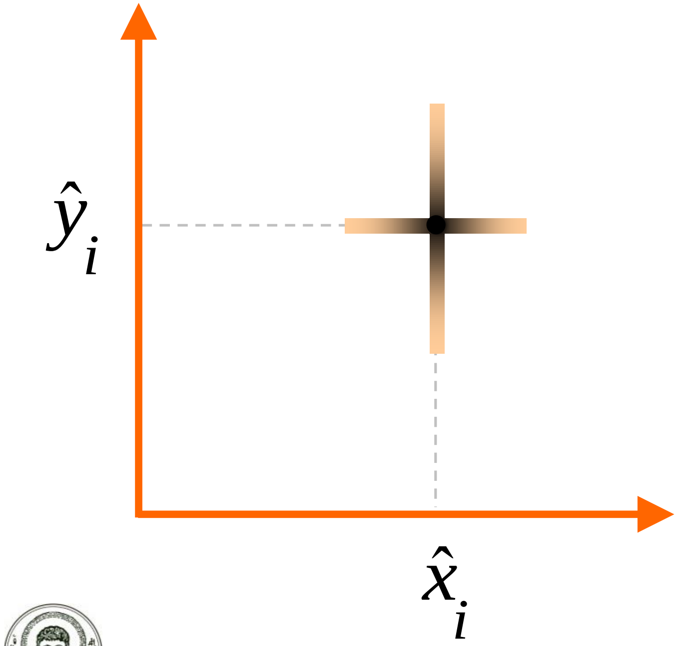
$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \ddots & \text{Σημείο } i & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_i,\hat{x}_i) & \sigma^2(\hat{y}_i) \end{matrix}} & & \text{Συμμετρ.} & \\ & \begin{matrix} \vdots & \qquad & \vdots \end{matrix} & \ddots & \text{Σημείο } j & \\ \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \sigma(\hat{x}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{y}_j,\hat{y}_i) \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_j) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_j) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_j) & \sigma^2(\hat{y}_j) \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \vdots & \qquad & \vdots \end{matrix} & & \begin{matrix} \vdots & \qquad & \vdots \end{matrix} & \ddots \end{bmatrix}$$

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (1/)

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \boxed{\sigma^2(\hat{x}_i)} & \sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i) & & & \text{Συμμετρ.} & \\ & \sigma(\hat{y}_i,\hat{x}_i) & \boxed{\sigma^2(\hat{y}_i)} & & & & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \cdots & \sigma(\hat{x}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_i) & \cdots & \boxed{\sigma^2(\hat{x}_j)} & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_j) & \cdots \\ \cdots & \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{y}_j,\hat{y}_i) & \cdots & \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_j) & \boxed{\sigma^2(\hat{y}_j)} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (2/)

- Εκφράζουν την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου μεμονωμένα για κάθε μία από τις βασικές διευθύνσεις του ΣΑ



διαστήματα εμπιστοσύνης (1-α) %

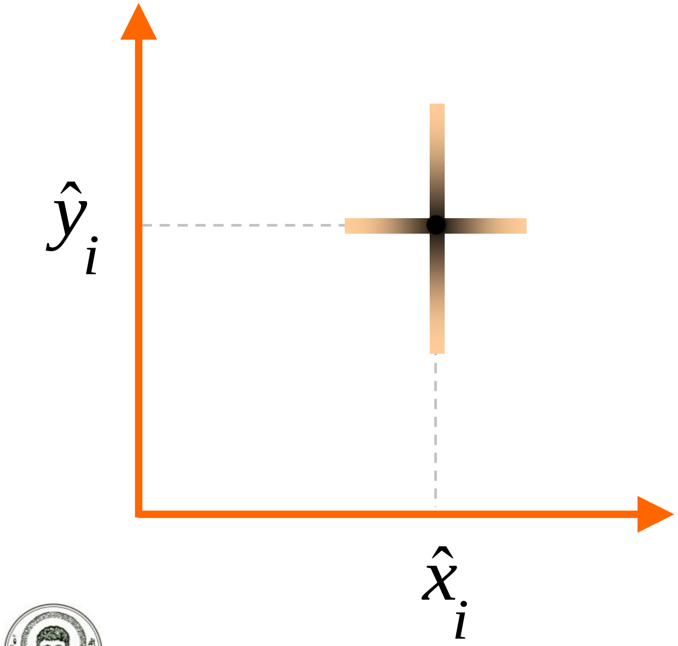
$$\hat{x}_i - z^{a/2}\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + z^{a/2}\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - z^{a/2}\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + z^{a/2}\sigma(\hat{y}_i)$$

(*) αγνοείται η συσχέτιση μεταξύ των δύο συντεταγμένων

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (3/)

- Εκφράζουν την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου μεμονωμένα για κάθε μία από τις βασικές διευθύνσεις του ΣΑ



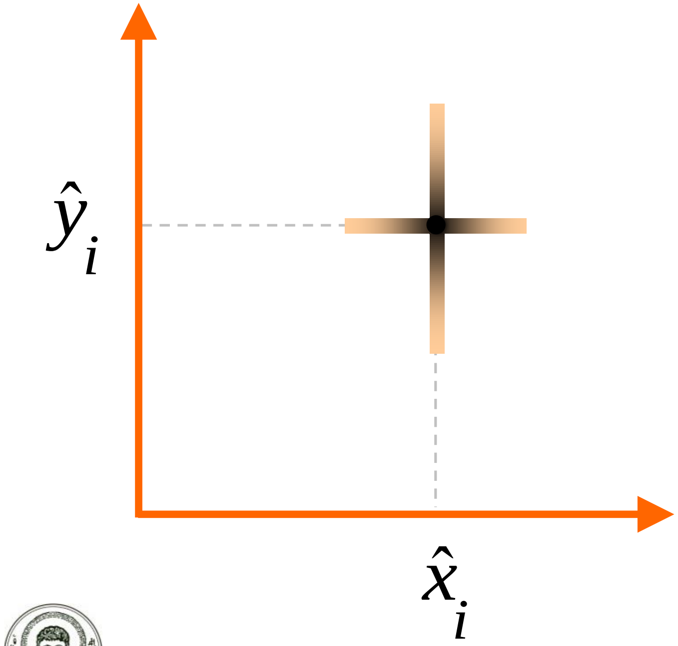
π.χ. για 95 % πιθανότητα

$$\hat{x}_i - 1.96\,\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + 1.96\,\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - 1.96\,\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + 1.96\,\sigma(\hat{y}_i)$$

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (4/)

- Εκφράζουν την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου <u>μεμονωμένα</u> για κάθε μία από τις βασικές διευθύνσεις του ΣΑ



π.χ. για 99 % πιθανότητα

$$\hat{x}_i - 2.58\,\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + 2.58\,\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - 2.58\,\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + 2.58\,\sigma(\hat{y}_i)$$

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (5/)

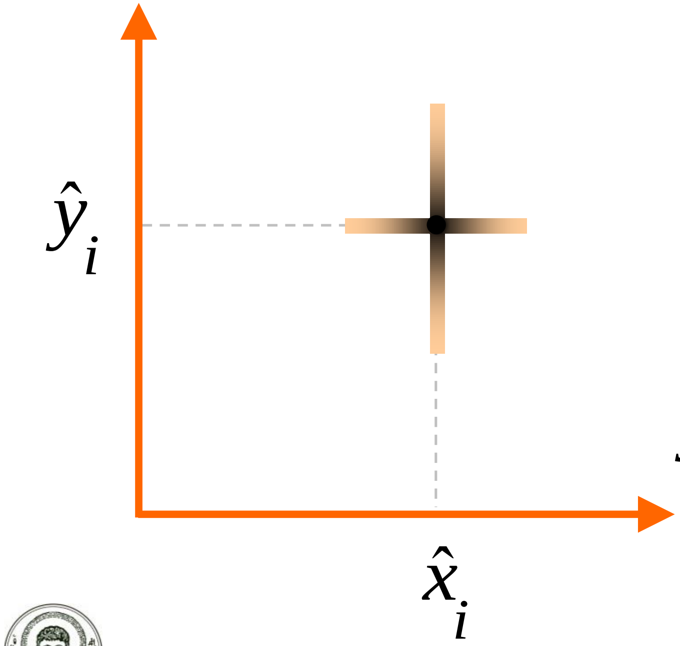
$$\hat{x}_i - z^{a/2}\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + z^{a/2}\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - z^{a/2}\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + z^{a/2}\sigma(\hat{y}_i)$$

- Τα παραπάνω διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιούνται όταν η ακρίβεια των παρατηρήσεων του δικτύου θεωρείται απόλυτα γνωστή.
- Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων <u>δε</u> διορθώνεται” μέσω πολλαπλασιασμού με την a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς.

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (6/)

- Εκφράζουν την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου μεμονωμένα για κάθε μία από τις βασικές διευθύνσεις του ΣΑ



διαστήματα εμπιστοσύνης (1-α) %

$$\hat{x}_i - t_f^{a/2}\,\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + t_f^{a/2}\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - t_f^{a/2}\,\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + t_f^{a/2}\sigma(\hat{y}_i)$$

(*) αγνοείται η συσχέτιση μεταξύ των δύο συντεταγμένων

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (7/)

$$\hat{x}_i - t_f^{a/2}\,\sigma(\hat{x}_i) \;<\; x_i \;<\; \hat{x}_i + t_f^{a/2}\sigma(\hat{x}_i)$$

$$\hat{y}_i - t_f^{a/2}\,\sigma(\hat{y}_i) \;<\; y_i \;<\; \hat{y}_i + t_f^{a/2}\sigma(\hat{y}_i)$$

- Τα παραπάνω διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιούνται όταν η ακρίβεια των παρατηρήσεων του δικτύου <u>δε</u> θεωρείται απόλυτα γνωστή ($σ_o$ άγνωστο).
- Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων “διορθώνεται” μέσω πολλαπλασιασμού με την a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς.

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (8/)

99 % πιθανότητα

$$\hat{x}_i - 2.58\,\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + 2.58\,\sigma(\hat{x}_i)$$

$$z^{a/2}$$

$$\hat{y}_i - 2.58\,\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + 2.58\,\sigma(\hat{y}_i)$$

99 % πιθανότητα

$$\hat{x}_i - 3.17\,\sigma(\hat{x}_i) < x_i < \hat{x}_i + 3.17\,\sigma(\hat{x}_i)$$

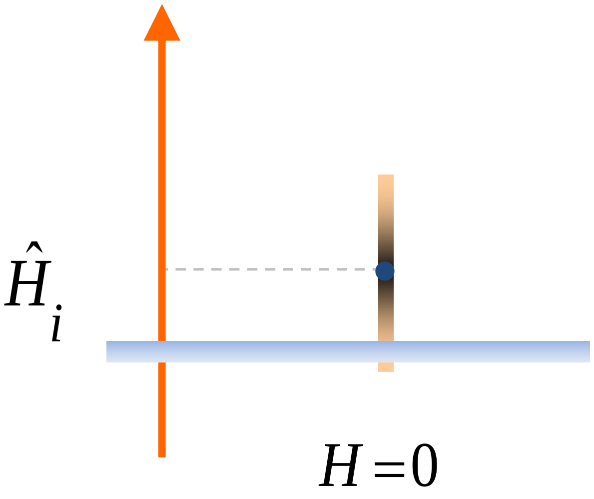
$$t_f^{a/2}$$

$$\hat{y}_i - 3.17\,\sigma(\hat{y}_i) < y_i < \hat{y}_i + 3.17\,\sigma(\hat{y}_i)$$

για δίκτυο με f = 10

Μεταβλητότητες συνορθωμένων συντεταγμένων (9/)

- Εκφράζουν την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου μεμονωμένα για κάθε μία από τις βασικές διευθύνσεις του ΣΑ



διαστήματα εμπιστοσύνης (1-α) %

$$\hat{H}_i - z^{a/2}\sigma(\hat{H}_i) < H_i < \hat{H}_i + z^{a/2}\sigma(\hat{H}_i)$$

ή

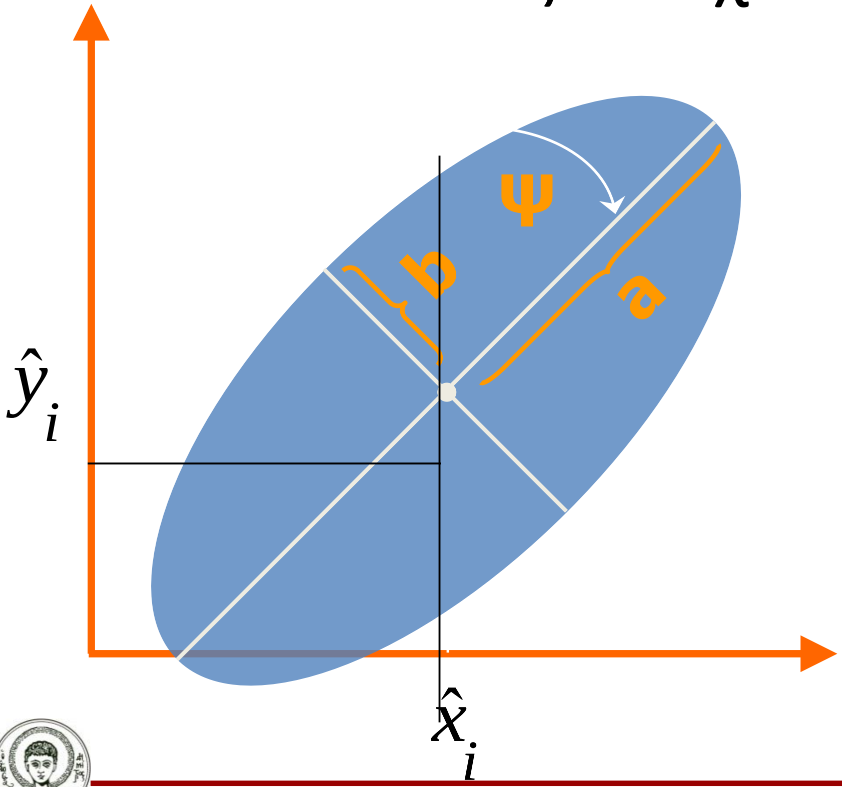
$$\hat{H}_i - t_f^{a/2}\sigma(\hat{H}_i) < H_i < \hat{H}_i + t_f^{a/2}\sigma(\hat{H}_i)$$

Απόλυτες ελλείψεις σφάλματος

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix}
\ddots & \color{red}{\textit{Σημείο } i} & & & \\
\begin{matrix}\cdots \\ \cdots\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_i,\hat{x}_i) & \sigma^2(\hat{y}_i) \end{matrix}} & & \text{Συμμετρ.} & \\
\vdots & \begin{matrix}\vdots & \qquad & \vdots\end{matrix} & \ddots & \color{red}{\textit{Σημείο } j} & \\
\begin{matrix}\cdots \\ \cdots\end{matrix} & \begin{matrix} \sigma(\hat{x}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{y}_j,\hat{y}_i) \end{matrix} & \begin{matrix}\cdots \\ \cdots\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_j) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_j) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_j) & \sigma^2(\hat{y}_j) \end{matrix}} & \begin{matrix}\cdots \\ \cdots\end{matrix} \\
 & \begin{matrix}\vdots & \qquad & \vdots\end{matrix} & & \begin{matrix}\vdots & \qquad & \vdots\end{matrix} & \ddots
\end{bmatrix}$$

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (1/)

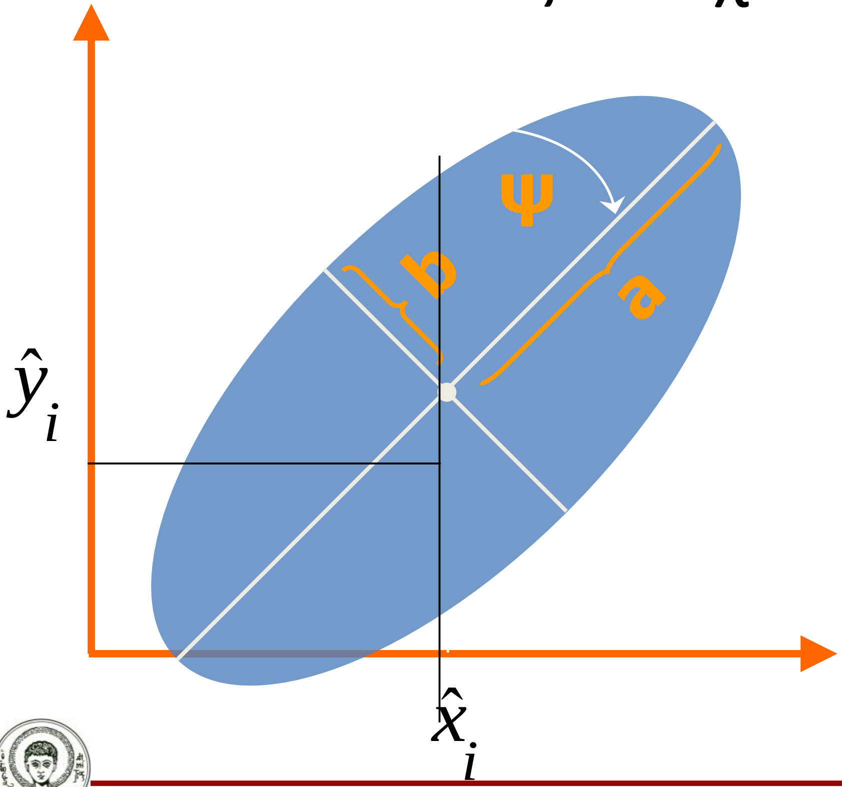
- Περιγράφει την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου προς όλες τις δυνατές διευθύνσεις σε σχέση με το σύστημα αναφοράς.



(*) λαμβάνει υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των συνορθωμένων συντεταγμένων κάθε σημείου

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (2/)

- Περιγράφει την ακρίβεια εκτίμησης της θέσης του εκάστοτε σημείου προς όλες τις δυνατές διευθύνσεις σε σχέση με το σύστημα αναφοράς.



(*) ορίζει τις διευθύνσεις μέγιστης και ελάχιστης ακρίβειας στον προσδιορισμό θέσης κάθε σημείου ως προς το ΣΑ

$$a = \sigma_{\max}$$

$$b = \sigma_{\min}$$

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (3/)

- Βασικοί τύποι

$$a = \sqrt{\frac{\sigma^2(\hat{x}_i)+\sigma^2(\hat{y}_i)+\sqrt{(\sigma^2(\hat{x}_i)-\sigma^2(\hat{y}_i))^2+4(\sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i))^2}}{2}}$$

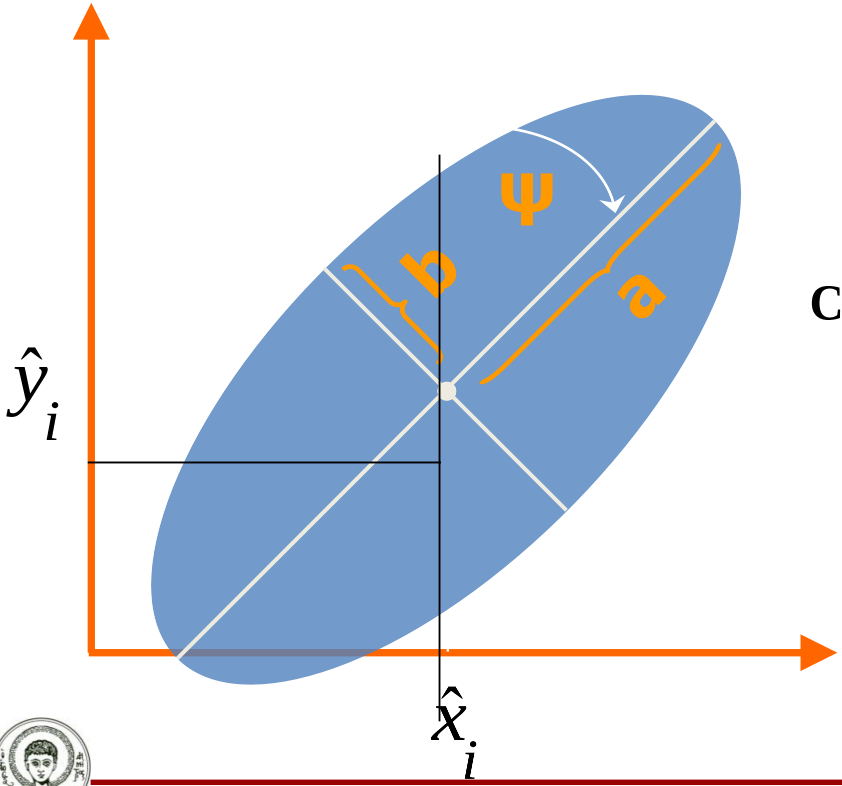
$$b = \sqrt{\frac{\sigma^2(\hat{x}_i)+\sigma^2(\hat{y}_i)-\sqrt{(\sigma^2(\hat{x}_i)-\sigma^2(\hat{y}_i))^2+4(\sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i))^2}}{2}}$$

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\,\sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i)}{\sigma^2(\hat{y}_i)-\sigma^2(\hat{x}_i)}$$

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (4/)

$$\left.\begin{aligned} a &= \sigma_{\max} \\ b &= \sigma_{\min} \end{aligned}\right\}$$

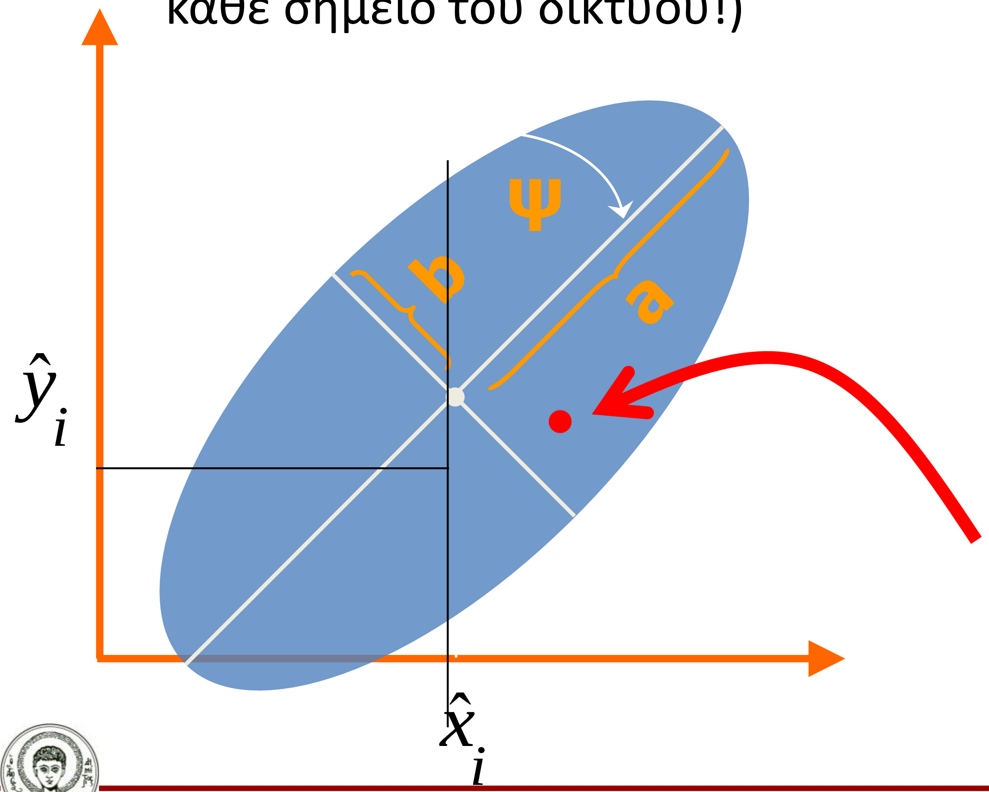
Αντιστοιχούν στις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του 2×2 συμμετρικού υπο-πίνακα που περιγράφει την ακρίβεια του σημείου *i*



$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ \cdots & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_i,\hat{x}_i) & \sigma^2(\hat{y}_i) \end{matrix}} & & \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \ddots & \\ & \text{[redacted]} & & \end{bmatrix}$$

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (5/)

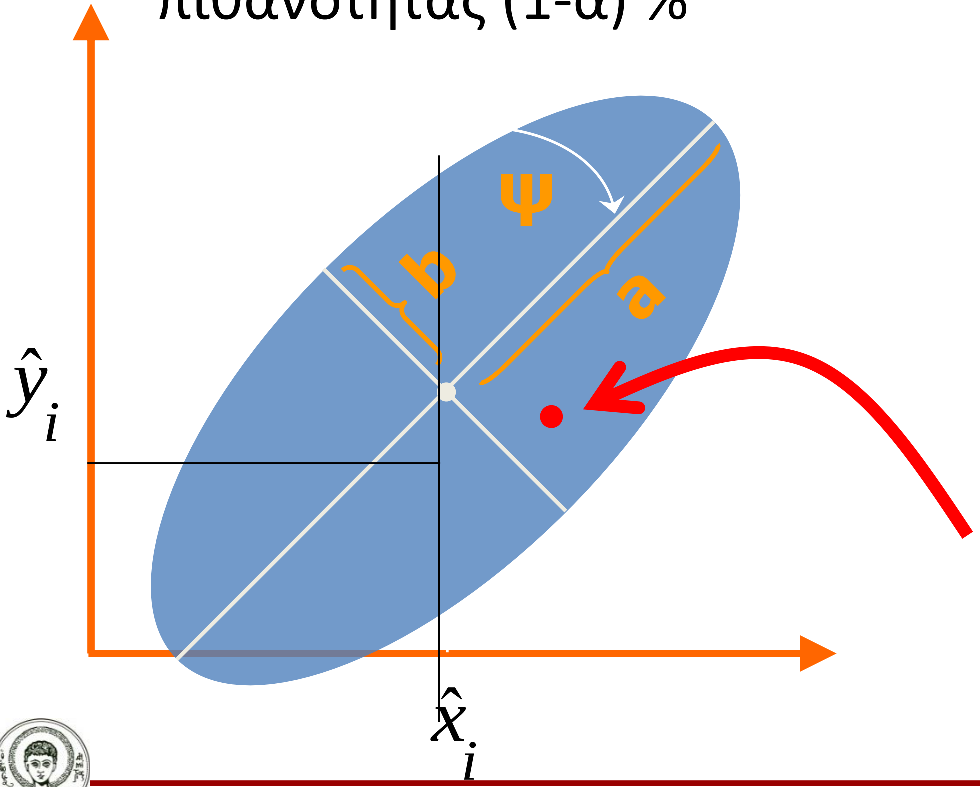
- Ορίζει μια περιοχή εμπιστοσύνης για την άγνωστη αληθινή θέση κάθε σημείου **με πιθανότητα ~ 39%** (ανεξάρτητα για το κάθε σημείο του δικτύου!)



Αληθινή θέση του σημείου *i*

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (6/)

- Ορίζει μια περιοχή εμπιστοσύνης για την άγνωστη αληθινή θέση κάθε σημείου με ένα προκαθορισμένο επίπεδο πιθανότητας (1-α) %



$$a' = p \times a \quad b' = p \times b$$

$$p = \sqrt{2F_{2,f}^{(a)}} \qquad p = \sqrt{\chi_2^{2(a)}}$$

Αληθινή θέση
του σημείου *i*

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (7/)

- Χρήση του συντελεστή

$$\mathrm{p} = \sqrt{\chi_2^{2(a)}}$$

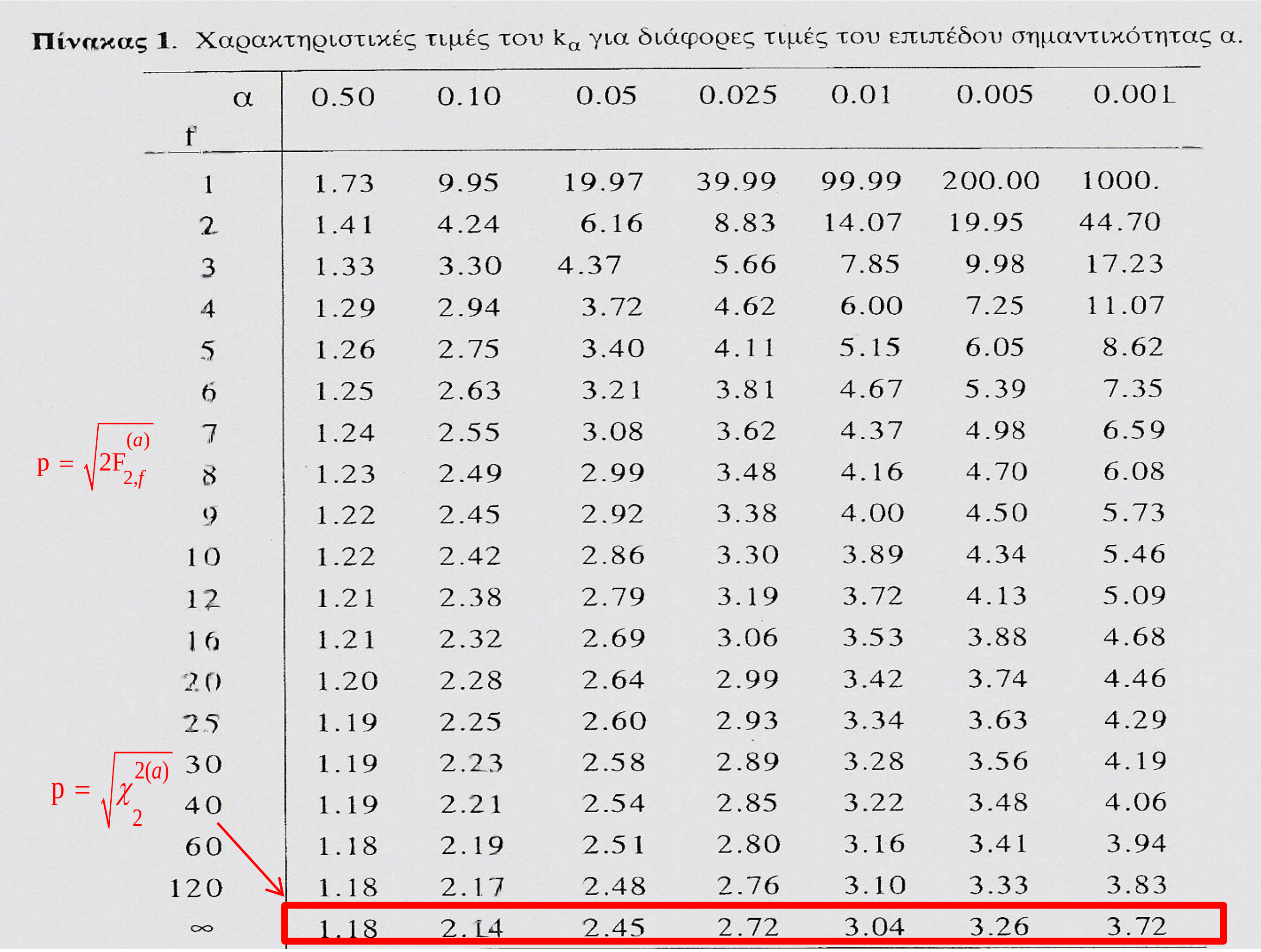
όταν η ακρίβεια των παρατηρήσεων του δικτύου είναι απόλυτα γνωστή. Στις περιπτώσεις αυτές ο πίνακας συμ-μεταβλητ. των συνορθωμένων συντεταγμένων δεν “διορθώνεται” μέσω του πολλαπλασιασμού του με την a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς.

- Χρήση του συντελεστή

$$\mathrm{p} = \sqrt{2\mathrm{F}_{2,f}^{(a)}}$$

όταν η ακρίβεια των παρατηρήσεων **δεν** είναι απόλυτα γνωστή. Στις περιπτώσεις αυτές ο πίνακας συμ-μεταβλητ. των συνορθωμένων συντεταγμένων “διορθώνεται” μέσω του πολλαπλασιασμού του με την a-posteriori εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς.

Απόλυτη έλλειψη σφάλματος (8/)



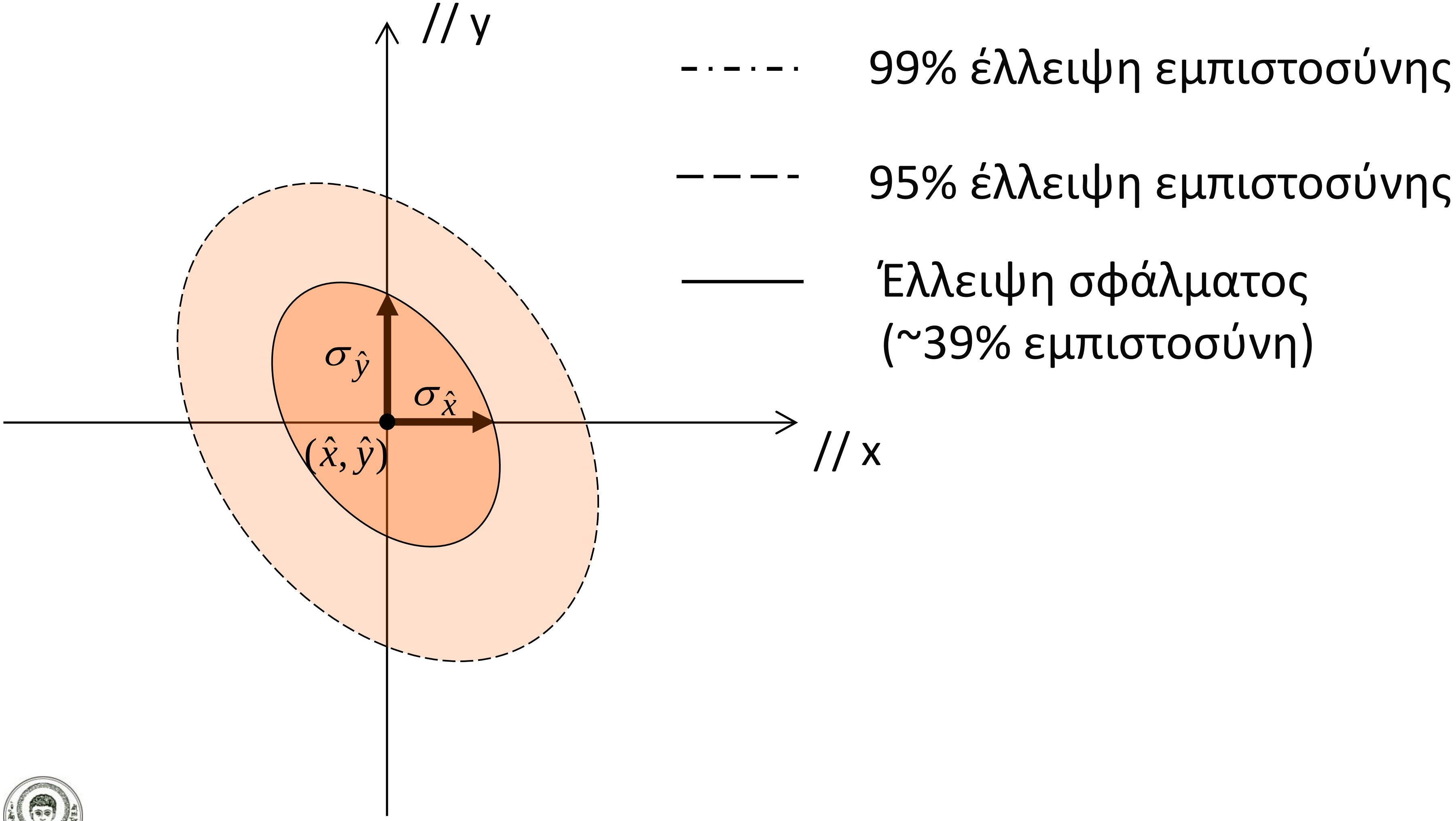
Πίνακας 1. Χαρακτηριστικές τιμές του k_α για διάφορες τιμές του επιπέδου σημαντικότητας α.

α f	0.50	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	1.73	9.95	19.97	39.99	99.99	200.00	1000.
2	1.41	4.24	6.16	8.83	14.07	19.95	44.70
3	1.33	3.30	4.37	5.66	7.85	9.98	17.23
4	1.29	2.94	3.72	4.62	6.00	7.25	11.07
5	1.26	2.75	3.40	4.11	5.15	6.05	8.62
6	1.25	2.63	3.21	3.81	4.67	5.39	7.35
7	1.24	2.55	3.08	3.62	4.37	4.98	6.59
8	1.23	2.49	2.99	3.48	4.16	4.70	6.08
9	1.22	2.45	2.92	3.38	4.00	4.50	5.73
10	1.22	2.42	2.86	3.30	3.89	4.34	5.46
12	1.21	2.38	2.79	3.19	3.72	4.13	5.09
16	1.21	2.32	2.69	3.06	3.53	3.88	4.68
20	1.20	2.28	2.64	2.99	3.42	3.74	4.46
25	1.19	2.25	2.60	2.93	3.34	3.63	4.29
30	1.19	2.23	2.58	2.89	3.28	3.56	4.19
40	1.19	2.21	2.54	2.85	3.22	3.48	4.06
60	1.18	2.19	2.51	2.80	3.16	3.41	3.94
120	1.18	2.17	2.48	2.76	3.10	3.33	3.83
∞	1.18	2.14	2.45	2.72	3.04	3.26	3.72

$p = \sqrt{2F^{(a)}_{2,f}}$

$p = \sqrt{\chi^{2(a)}_{2}}$

Έλλειψη σφάλματος/ εμπιστοσύνης



- · - · - 99% έλλειψη εμπιστοσύνης

– – – – 95% έλλειψη εμπιστοσύνης

—— Έλλειψη σφάλματος (~39% εμπιστοσύνη)

Προσανατολισμός έλλειψης σφάλματος

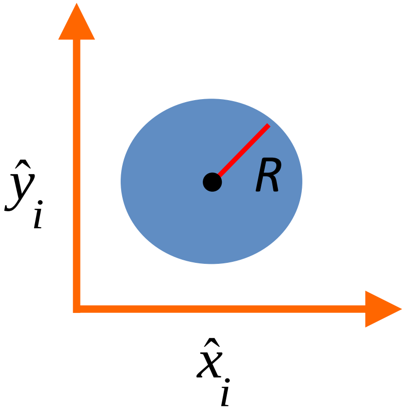
$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\,\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i)}{\sigma^2(\hat{y}_i) - \sigma^2(\hat{x}_i)}$$

	$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) > 0$	$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) < 0$
$\sigma^2(\hat{y}_i) - \sigma^2(\hat{x}_i) > 0$	$0 < \psi < \frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < \psi < \pi$
$\sigma^2(\hat{y}_i) - \sigma^2(\hat{x}_i) < 0$	$\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{4}$

Ειδικές περιπτώσεις (1/)

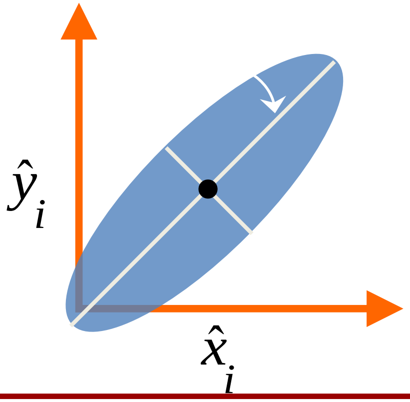
$$\sigma^2(\hat{x}_i) = \sigma^2(\hat{y}_i)$$

$$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = 0$$



$$\sigma^2(\hat{x}_i) = \sigma^2(\hat{y}_i)$$

$$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \neq 0$$

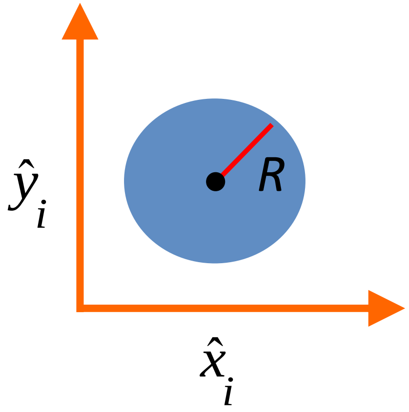


ψ = 45°

Ειδικές περιπτώσεις (2/)

$$\sigma^2(\hat{x}_i) = \sigma^2(\hat{y}_i)$$

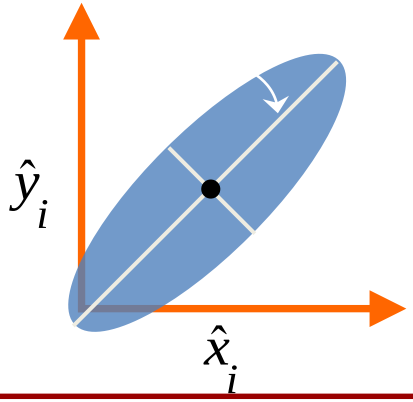
$$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = 0$$



ψ = 90°

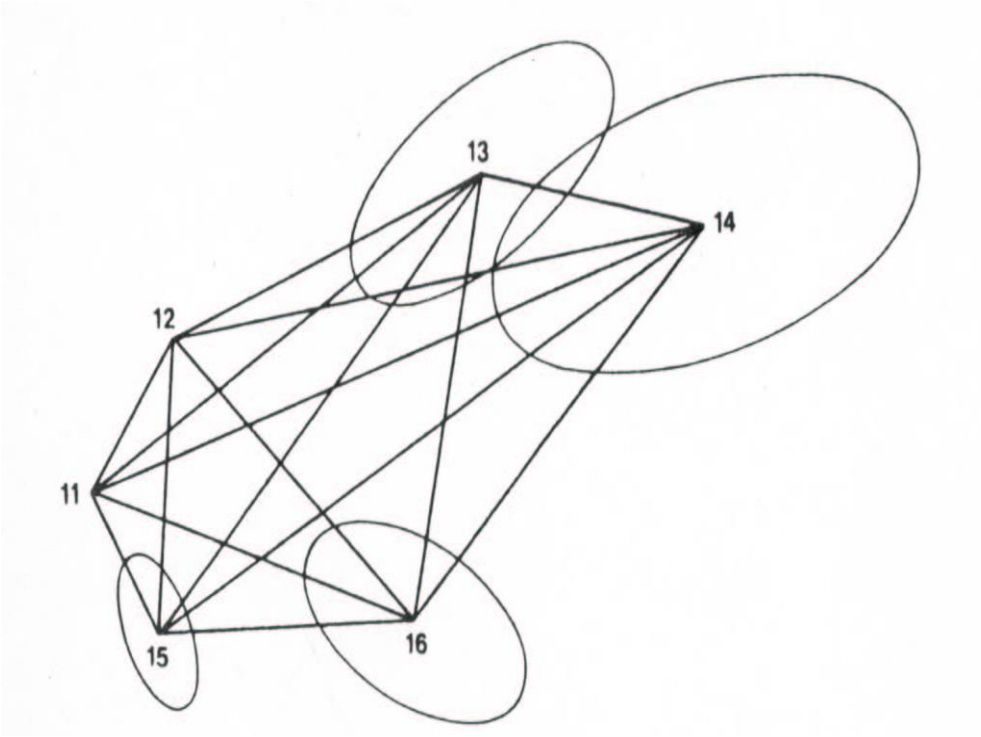
$$\sigma^2(\hat{x}_i) = \sigma^2(\hat{y}_i)$$

$$\sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \neq 0$$



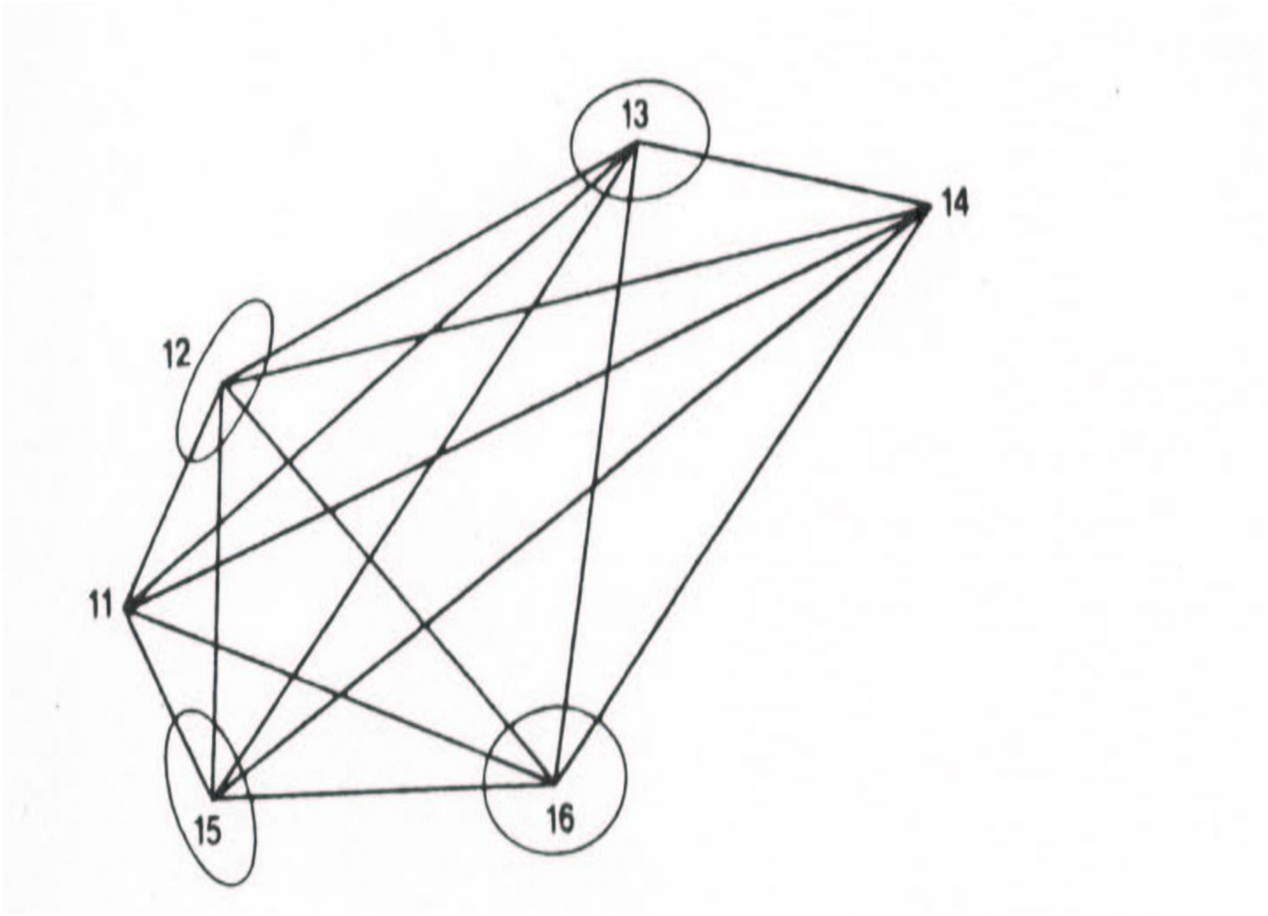
ψ = 0°

Παράδειγμα (1/)



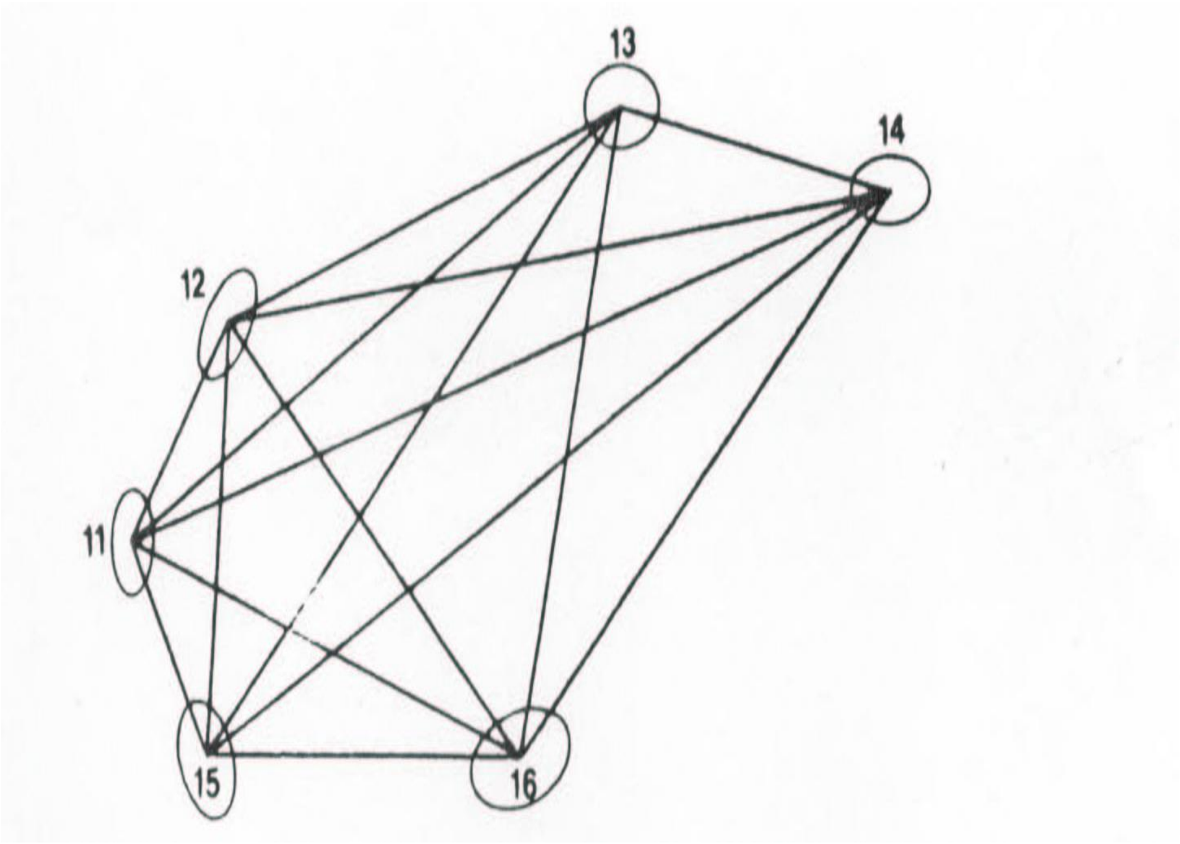
Σημεία 11 και 12 σταθερά

Παράδειγμα (2/)



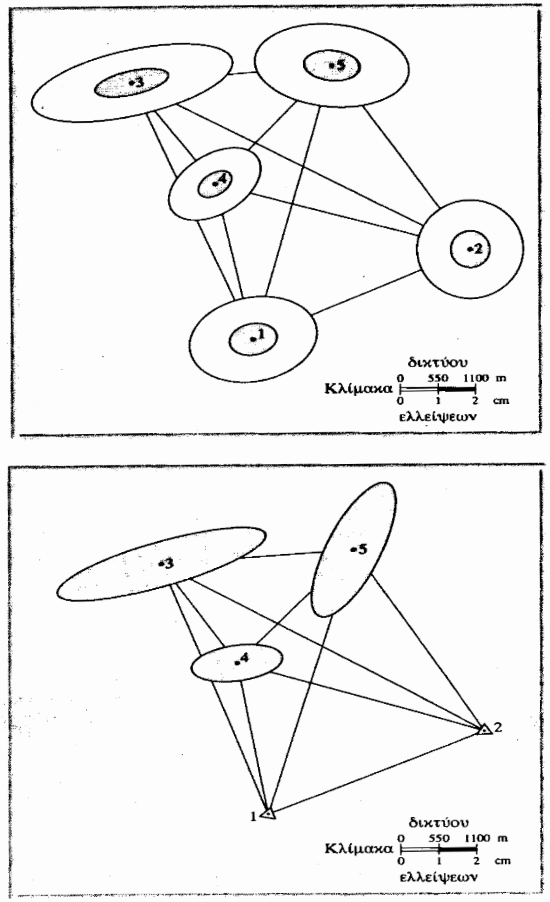
Σημεία 11 και 14 σταθερά

Παράδειγμα (3/)



Εσωτερικές δεσμεύσεις

Παράδειγμα (4/)

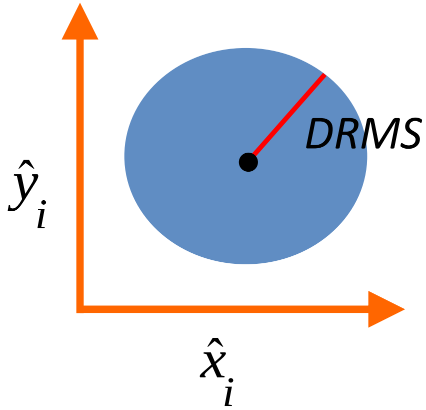


Σχήμα 2. Οι απόλυτες ελλείψεις σφάλματος σε σχέση με το σύστημα αναφοράς. Στο σχήμα α, της λύσης του ελευθέρου δικτύου σχεδιάστηκαν και οι ελλείψεις εμπιστοσύνης για 1–α = 95%

Άλλοι σημαντικοί δείκτες 2Δ σημειακής ακρίβειας (1/)

- DRMS (Distance Root Mean Square)
  - 2D radial error (ακτινικό σφάλμα θέσης)
  - 2D mean square position error (μέσο τετραγωνικό σφάλμα θέσης)

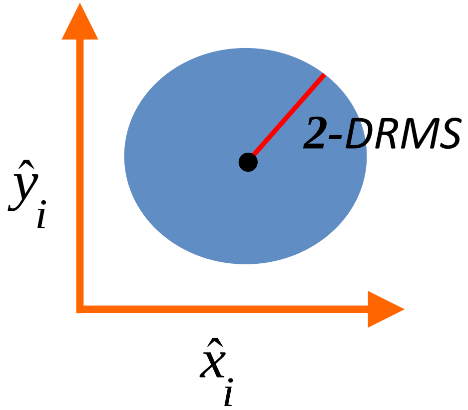
$$\mathrm{DRMS} = \sqrt{\sigma^2(\hat{x}_i) + \sigma^2(\hat{y}_i)}$$



Το επίπεδο πιθανότητας κυμαίνεται μεταξύ 63% και 77%

Άλλοι σημαντικοί δείκτες 2Δ σημειακής ακρίβειας (2/)

- DRMS (Distance Root Mean Square)
  - 2D radial error (ακτινικό σφάλμα θέσης)
  - 2D mean square position error (μέσο τετραγωνικό σφάλμα θέσης)



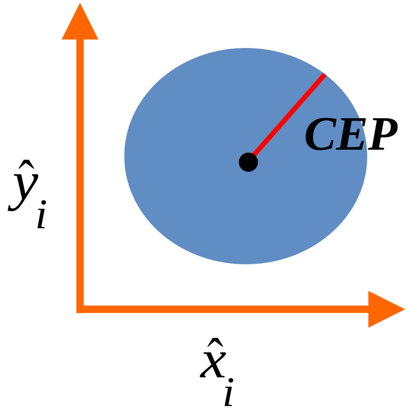
$$2\text{-DRMS} = 2 \times \sqrt{\sigma^2(\hat{x}_i) + \sigma^2(\hat{y}_i)}$$

Το επίπεδο πιθανότητας κυμαίνεται μεταξύ 95% και 98%

Άλλοι σημαντικοί δείκτες 2Δ σημειακής ακρίβειας (3/)

- CEP (Circular Error Probable)

Είναι η ακτίνα κύκλου μέσα στον οποίο βρίσκεται η αληθινή θέση του σημείου με πιθανότητα 50%



$$\mathrm{CEP} = 0.59 \times \left(\sigma(\hat{x}_i) + \sigma(\hat{y}_i) \right)$$

(με καλή προσέγγιση: ± 3%)

Σχετικές Ελλείψεις Σφάλματος

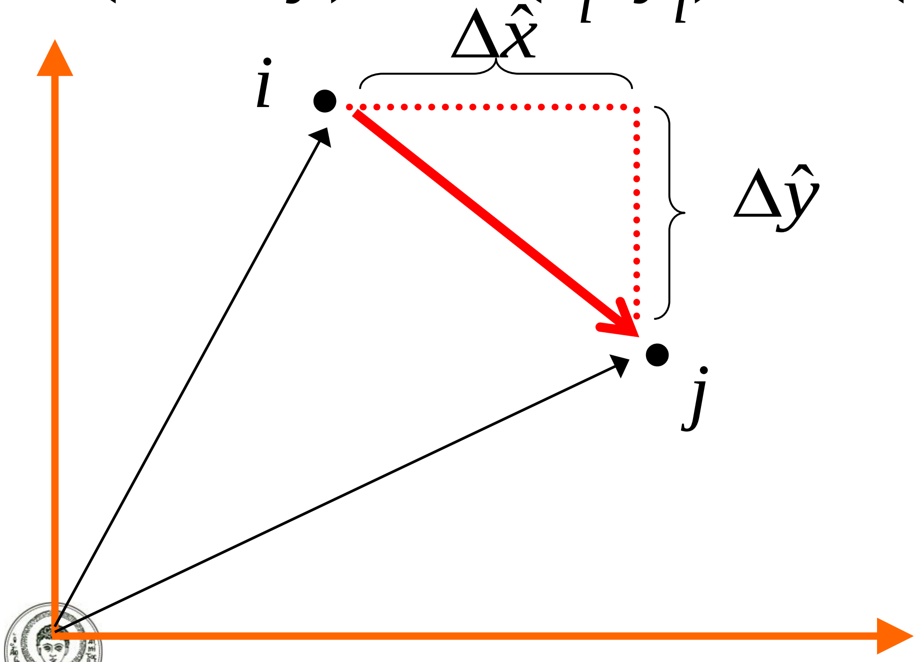
$$
\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} =
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & \\
& \text{Σημείο } i & & \text{Συμμετρ.} & \\
& \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_i,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_i,\hat{x}_i) & \sigma^2(\hat{y}_i) \end{matrix}} & & & \\
& \vdots \; \text{“Βάση” } i\text{-}j \; \vdots & \ddots & \text{Σημείο } j & \\
\cdots & \boxed{\begin{matrix} \sigma(\hat{x}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_i) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_i) & \sigma(\hat{y}_j,\hat{y}_i) \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} \sigma^2(\hat{x}_j) & \sigma(\hat{x}_j,\hat{y}_j) \\ \sigma(\hat{y}_j,\hat{x}_j) & \sigma^2(\hat{y}_j) \end{matrix}} & \cdots \\
& \vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

Ακρίβεια «βάσης»

$$\sigma^2(\Delta\hat{x}) = \sigma^2(\hat{x}_i) + \sigma^2(\hat{x}_j) - 2\,\sigma(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$$

$$\sigma^2(\Delta\hat{y}) = \sigma^2(\hat{y}_i) + \sigma^2(\hat{y}_j) - 2\,\sigma(\hat{y}_i, \hat{y}_j)$$

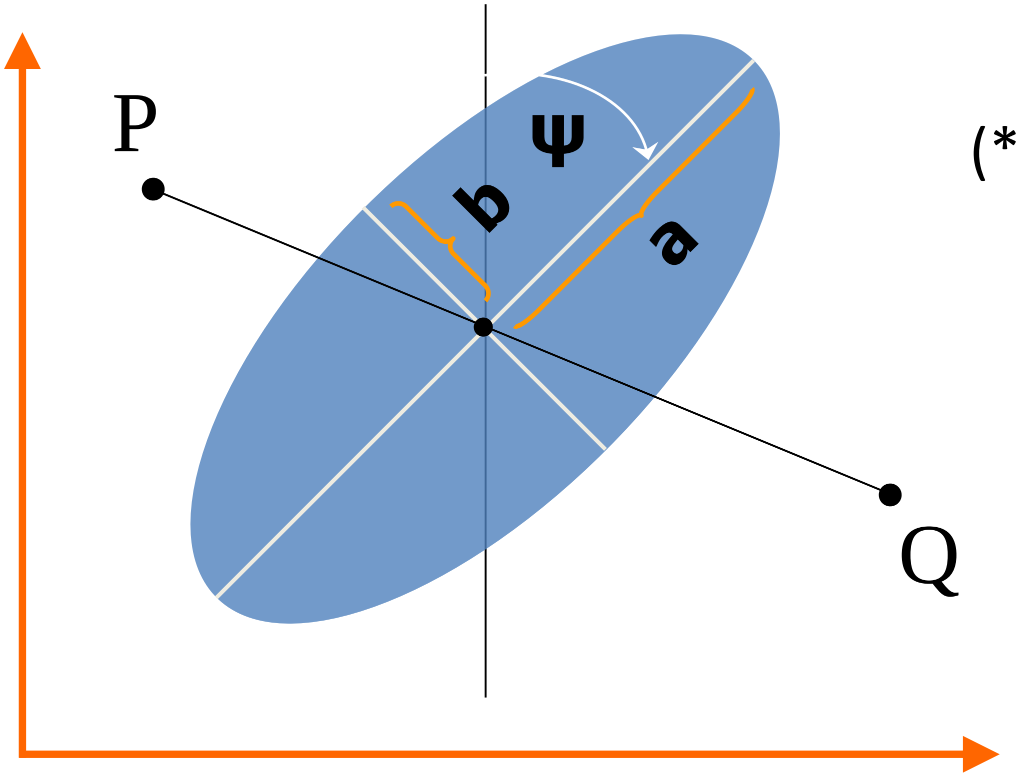
$$\sigma(\Delta\hat{x}, \Delta\hat{y}) = \sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_i) + \sigma(\hat{x}_j, \hat{y}_j) - \sigma(\hat{x}_i, \hat{y}_j) - \sigma(\hat{y}_i, \hat{x}_j)$$



Εκφράζουν την ακρίβεια του διανύσματος *ij* ως προς το ΣΑ

Σχετική έλλειψη σφάλματος (1/)

- Εκφράζει την ακρίβεια εκτίμησης της σχετικής θέσης δύο σημείων του δικτύου ως προς το ΣΑ



(*) λαμβάνει υπόψη την συσχέτιση μεταξύ των συνορθωμένων συντ/νων διαφορετικών σημείων

Σχετική έλλειψη σφάλματος (2/)

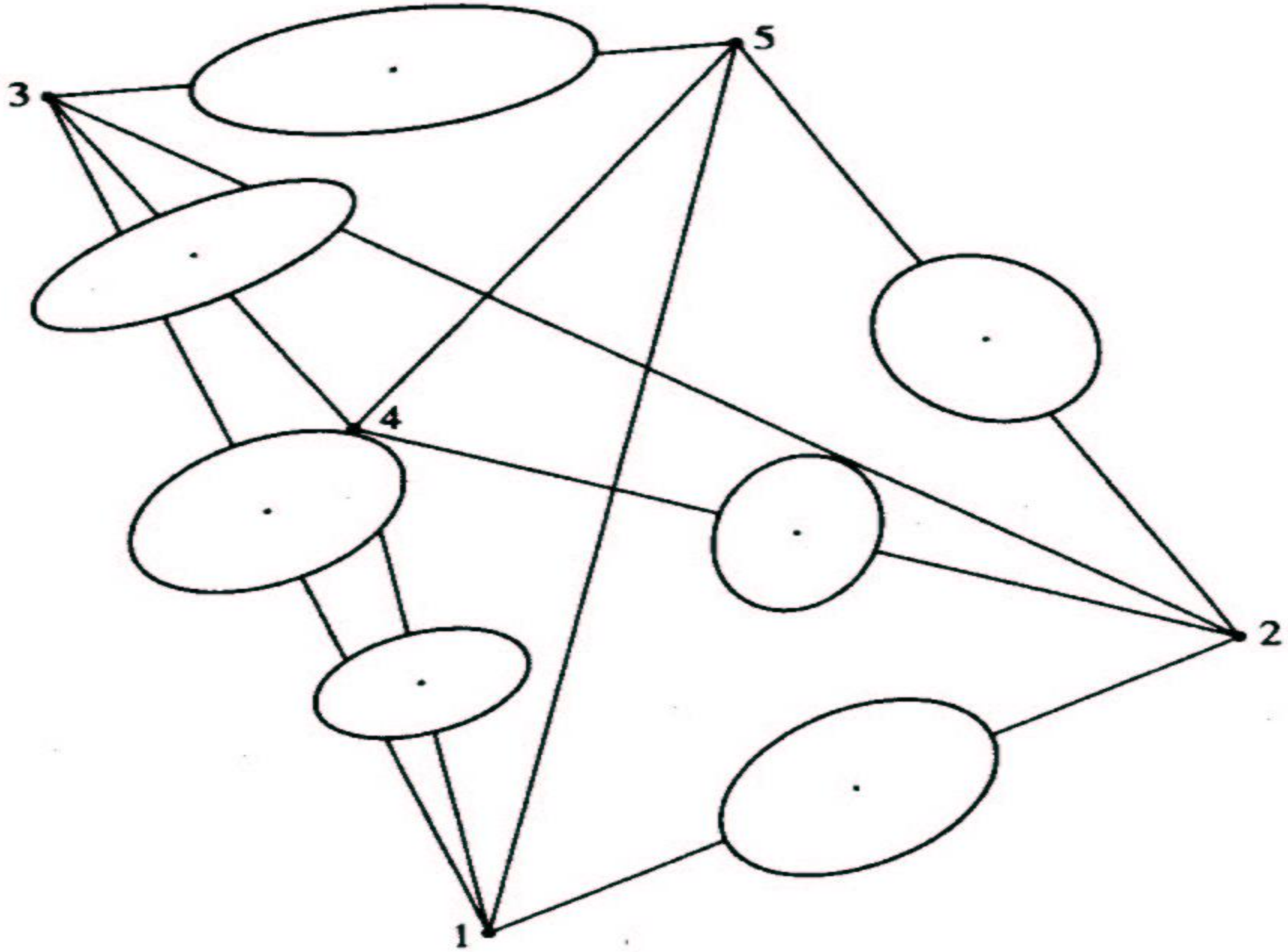
- Βασικοί τύποι

$$a = \sqrt{\frac{\sigma^2(\Delta\hat{x})+\sigma^2(\Delta\hat{y})+\sqrt{(\sigma^2(\Delta\hat{x})-\sigma^2(\Delta\hat{y}))^2+4(\sigma(\Delta\hat{x},\ \Delta\hat{y}))^2}}{2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sigma^2(\Delta\hat{x})+\sigma^2(\Delta\hat{y})-\sqrt{(\sigma^2(\Delta\hat{x})-\sigma^2(\Delta\hat{y}))^2+4(\sigma(\Delta\hat{x},\ \Delta\hat{y}))^2}}{2}}$$

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\,\sigma(\Delta\hat{x},\ \Delta\hat{y})}{\sigma^2(\Delta\hat{y}) - \sigma^2(\Delta\hat{x})}$$

Σχετική έλλειψη σφάλματος (3/)



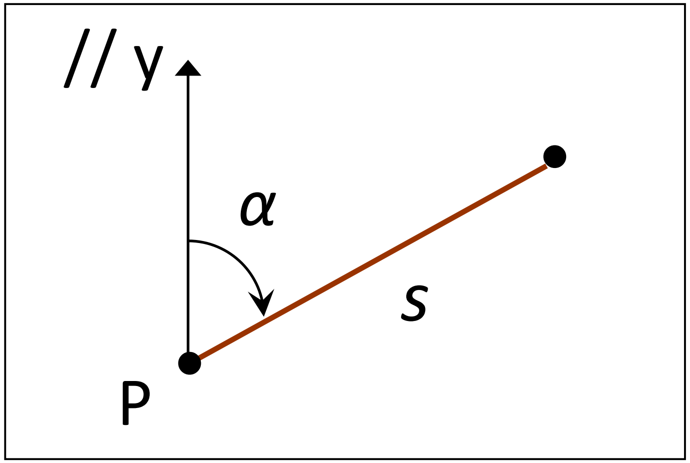
Γραμμική ακρίβεια δικτύου

- Εκφράζει την ακρίβεια της συνορθωμένης απόστασης για τις πλευρές του δικτύου

$$\sigma^2(\hat{s}) \;=\; \sigma^2(\Delta\hat{x})\cdot\sin^2 a + \sigma^2(\Delta\hat{y})\cdot\cos^2 a + 2\,\sigma(\Delta\hat{x},\,\Delta\hat{y})\cdot\sin a\cdot\cos a$$

- σχετική γραμμική ακρίβεια

$\dfrac{\sigma(\hat{s})}{\hat{s}}$ (σε ppm)



$$\sigma(\hat{s}) = 1\,\text{cm}$$

$$\hat{s} = 1205.18\,\text{m}$$

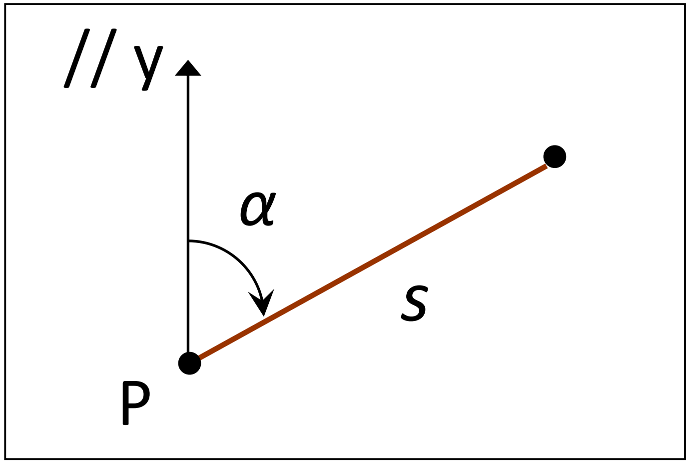
$$\frac{\sigma(\hat{s})}{\hat{s}} = 8.3\,\text{ppm}$$

Ακρίβεια προσανατολισμού δικτύου

- Εκφράζει την ακρίβεια του συνορθωμένου αζιμουθίου για τις πλευρές του δικτύου

$$\sigma^2(\hat{a}) = \frac{\sigma^2(\Delta\hat{x})\cdot\cos^2\hat{a} + \sigma^2(\Delta\hat{y})\cdot\sin^2\hat{a} - 2\,\sigma(\Delta\hat{x},\,\Delta\hat{y})\cdot\sin\hat{a}\cdot\cos\hat{a}}{\hat{S}}$$

(*) εξαρτάται άμεσα από το ΣΑ, είτε έχουν χρησιμοποιηθεί ελάχιστες είτε πλεονάζουσες δεσμεύσεις (μιας και στην πράξη δεν έχουμε ποτέ μετρήσεις αζιμουθίων σε ένα δίκτυο)



Υψομετρική ακρίβεια δικτύου

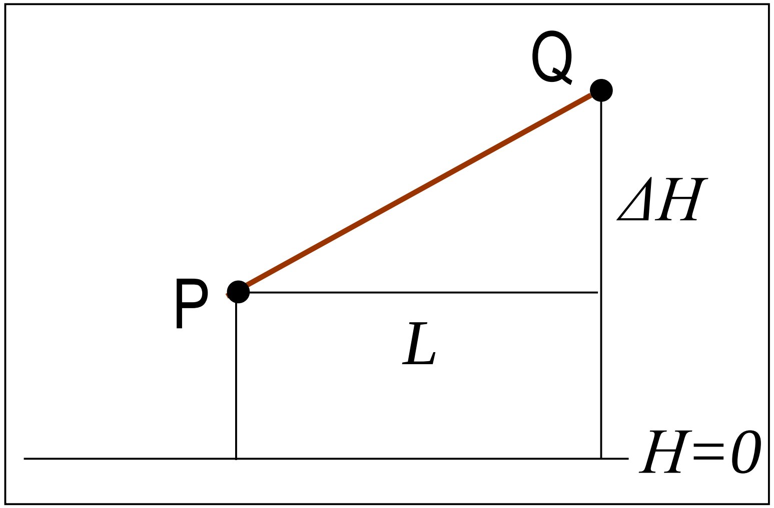
- Εκφράζει την ακρίβεια της συνορθωμένης υψομετρικής διαφοράς για πλευρές του δικτύου

$$\sigma^2(\Delta\hat{H}_{PQ}) = \sigma^2(\hat{H}_P) + \sigma^2(\hat{H}_Q) - 2\,\sigma(\hat{H}_P, \hat{H}_Q)$$

- σχετική υψομετρική ακρίβεια

$$\frac{\sigma(\Delta\hat{H})}{L}$$ (σε mm/km)

(*) ανεξάρτητη του ΣΑ αν έχουν χρησιμοποιηθεί ελάχιστες δεσμεύσεις για τη συνόρθωση του δικτύου



Αξιολόγηση της «συνολικής» ακρίβειας ενός δικτύου

Ανάλυση ακρίβειας δικτύου

- Δείκτες αξιολόγησης της **“συνολικής”** ή **“μέσης”** ακρίβειας του δικτύου:
  - Ίχνος του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων.
  - Ορίζουσα του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων.
  - Μέγιστη/ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντεταγμένων.

«Μέση» μεταβλητότητα σημείων δικτύου (1/)

- Αριθμητικός μέσος όρος των μεταβλητοτήτων για όλες τις συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου.

$$\bar{\sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}^{2} = \frac{1}{2N} \text{trace } \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$$ (2Δ δίκτυο)

- «Μέσο σημειακό σφάλμα» $\bar{\sigma}_{P_i} = \sqrt{2}\,\bar{\sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}$

«Μέση» μεταβλητότητα σημείων δικτύου (2/)

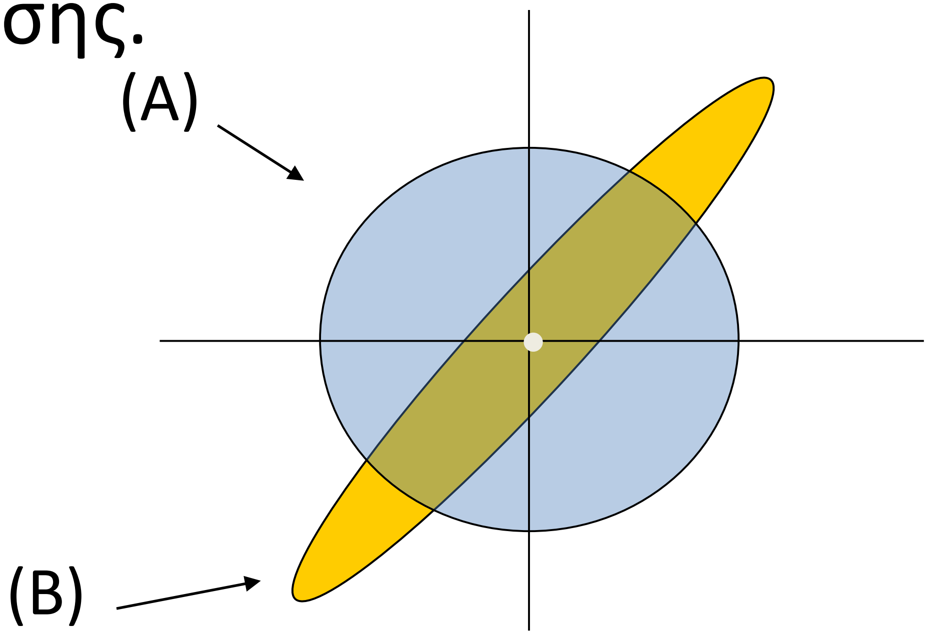
- Αριθμητικός μέσος όρος των μεταβλητοτήτων για όλες τις συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου.

$$\bar{\sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}^2 = \frac{1}{N} \text{trace}\, \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$$ (1Δ δίκτυο)

- «Μέσο σημειακό σφάλμα» $\bar{\sigma}_{P_i} = \bar{\sigma}_{\hat{\mathbf{x}}}$

«Μέση» μεταβλητότητα σημείων δικτύου (3/)

- Η χρήση της μέσης μεταβλητότητας για την αξιολόγηση της ακρίβειας ενός δικτύου μπορεί να εξομοιώσει τελείως διαφορετικά αποτελέσματα συνόρθωσης.
- Π.χ.
  - Συνόρθωση (A)
  - Συνόρθωση (B)



«Γενικευμένη» μεταβλητότητα σημείων δικτύου (1/)

- Η γενικευμένη μεταβλητότητα ορίζεται για τον καλύτερο “διαχωρισμό” περιπτώσεων παρόμοιων με αυτών του προηγούμενου παραδείγματος

$$\tilde{\sigma}^2_{\hat{\mathbf{x}}} = \sqrt[(2N)]{\det \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}} \qquad \text{(2Δ δίκτυο)}$$

- Η τιμή της είναι ανάλογη του εμβαδού που καλύπτουν οι ελλείψεις σφάλματος των σημείων του δικτύου.

«Γενικευμένη» μεταβλητότητα σημείων δικτύου (2/)

- Η γενικευμένη μεταβλητότητα ορίζεται για τον καλύτερο “διαχωρισμό” περιπτώσεων παρόμοιων με αυτών του προηγούμενου παραδείγματος

$$\tilde{\sigma}^2_{\hat{\mathbf{x}}} = \sqrt[(N)]{\det \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}} \qquad \text{(1Δ δίκτυο)}$$

- Η τιμή της είναι ανάλογη του εύρους που έχουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τα υψόμετρα όλων των σημείων του δικτύου.

Ακρίβεια «χρήσης» του δικτύου

- Για ένα οποιοδήποτε μέγεθος *q* που είναι συνάρτηση των συντεταγμένων των κορυφών του δικτύου, π.χ. $q = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

$$\hat{q} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \longrightarrow \sigma^2(\hat{q}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{a}$$

- Εύρος ακρίβειας για το παράγωγο μέγεθος (Rayleigh criterion): $\lambda_{\min}\, \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} \leq \sigma^2(\hat{q}) \leq \lambda_{\max}\, \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$

- όπου λ_{max} και λ_{min} είναι η μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 4: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 5: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 6: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 7: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος>< πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χριστόφορος Κωτσάκης, «Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί, Αξιολόγηση εκρίβειας στη συνόρθωση δικτύων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευστάθιος Μπουχουράς

Θεσσαλονίκη,

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.