ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί

Ενότητα **8**: Αλγόριθμοι συνόρθωσης δικτύων

Χριστόφορος Κωτσάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αλγόριθμοι συνόρθωσης δικτύων

Περιεχόμενα ενότητας (1/2)

- Ο ρόλος του πίνακα βάρους των δεσμεύσεων. Χρήση ελάχιστων δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου.
- Χρήση απόλυτων πλεοναζουσών δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου.
- Χρήση χαλαρών πλεοναζουσών δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου.

Περιεχόμενα ενότητας (2/2)

- Διαχωρισμένος αλγόριθμος εισαγωγής πλεοναζουσών δεσμεύσεων στην συνόρθωση δικτύου.
- Αλγόριθμος για την χρήση σταθμών αναφοράς με βάρη στην συνόρθωση δικτύου.
- Άλλες ειδικές περιπτώσεις αλγόριθμων συνόρθωσης δικτύων.

Σκοποί ενότητας

- ***Ο ρόλος του πίνακα βάρους των δεσμεύσεων. Χρήση ελάχιστων δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου. Χρήση απόλυτων πλεοναζουσών δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου. Χρήση χαλαρών πλεοναζουσών δεσμεύσεων για την συνόρθωση δικτύου. Διαχωρισμένος αλγόριθμος εισαγωγής πλεοναζουσών δεσμεύσεων στην συνόρθωση δικτύου. Αλγόριθμος για την χρήση σταθμών αναφοράς με βάρη στην συνόρθωση δικτύου. Άλλες ειδικές περιπτώσεις αλγόριθμων συνόρθωσης δικτύων.***

Τίτλος και Αρίθμηση (1/3)

1. Γενικός Αλγόριθμος Συνόρθωσης Δικτύου
2. Αλγόριθμος για ελάχιστες δεσμεύσεις
3. Εναλλακτικός αλγόριθμος για ελάχιστες δεσμεύσεις
4. Αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις
5. Εναλλακτικός αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις

Τίτλος και Αρίθμηση (2/3)

7. Διαχωρισμένος αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις
8. Αλγόριθμος για σταθερές προσεγγιστικές συντ/νες
9. Παρατήρηση
10. Αλγόριθμος συνόρθωσης για χρήση σταθμών αναφοράς με βάρη
11. Υπολογισμός συνορθωμένων παρατηρήσεων και σφαλμάτων

Τίτλος και Αρίθμηση (3/3)

12. Εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς
13. Σχόλιο (1)
14. Συνόρθωση του ίδιου δικτύου με διαφορετικές ελάχιστες δεσμεύσεις
15. Σχόλιο (2)
16. Συνόρθωση του ίδιου δικτύου με ελάχιστες και πλεονάζουσες δεσμεύσεις
17. Ελάχιστες ή πλεονάζουσες δεσμεύσεις;
18. Εισαγωγή γεωμετρικών δεσμεύσεων

Γενικός Αλγόριθμος Συνόρθωσης Δικτύου

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \delta\hat{\mathbf{x}}$$

- **Ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω αλγορίθμου:**
  - Χρήση απόλυτων δεσμεύσεων (**W** → ∞)
    - Ελάχιστες δεσμεύσεις
    - Πλεονάζουσες δεσμεύσεις (ενιαίος αλγόριθμος)
    - Πλεονάζουσες δεσμεύσεις (διαχωρισμένος αλγόριθμος)
    - Διατήρηση σταθερών προσεγγιστικών συντεταγμένων
  - Χρήση σταθμών αναφοράς με βάρη ($\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}}$)

Αλγόριθμος για ελάχιστες δεσμεύσεις (1/2)

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}}+\delta\hat{\mathbf{x}}$$

Θα ισχύει: $\mathbf{H}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c} \quad \mathbf{N}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$

- Ο παραπάνω αλγόριθμος δίνει το <u>ίδιο αποτέλεσμα</u> με το γενικό αλγόριθμο συνόρθωσης δικτύου.

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

- Να θυμόσαστε
  - Οι λύσεις ελαχίστων δεσμεύσεων δεν επηρεάζονται από τον πίνακα βάρους W.
  - Οι ελάχιστες δεσμεύσεις λειτουργούν πάντα ως απόλυτες δεσμεύσεις χωρίς να παραμορφώνουν το δίκτυο.

Αλγόριθμος για ελάχιστες δεσμεύσεις (2/2)

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \delta\hat{\mathbf{x}}$$

Θα ισχύει: $\mathbf{H}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c} \quad \mathbf{N}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$

(*) όταν **H = E** τότε έχουμε τη λύση με *εσωτερικές δεσμεύσεις*

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \delta\hat{\mathbf{x}}$$

Θα ισχύει: $\mathbf{E}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c} \quad \mathbf{N}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$

Εναλλακτικός αλγόριθμος για ελάχιστες δεσμεύσεις

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο παρακάτω ισοδύναμος αλγόριθμος

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{c}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

- όπου **E** είναι ο πίνακας των εσωτερικών δεσμεύσεων.
- Θα ισχύει: $\mathbf{H}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c} \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$

Αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1})\,\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

Θα ισχύει: $\mathbf{H}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{u}$

Βοηθητικοί πίνακες: $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$

- Ο παραπάνω αλγόριθμος αντιστοιχεί στη λύση του γενικού αλγορίθμου

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\,(\mathbf{u} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

- όταν ο πίνακας βάρους **W** → ∞

Εναλλακτικός αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις

- Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ο γενικός αλγόριθμος συνόρθωσης δικτύου

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

- με **μεγάλες τιμές** για τον πίνακα βάρους των πλεοναζουσών δεσμεύσεων, π.χ.

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2}\mathbf{I} \qquad \tilde{\sigma} = 0.01\,\mathrm{mm}$$

$$\downarrow$$

"Ακρίβεια" σταθμών αναφοράς

Διαχωρισμένος αλγόριθμος για πλεονάζουσες απόλυτες δεσμεύσεις

- Λύση ελαχίστων δεσμεύσεων

$$\mathbf{H}_1 \delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_1 \qquad \delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_1)^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_1)$$

- Λύση πλεοναζουσών δεσμεύσεων

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta\hat{\mathbf{x}}' = \delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_2\mathbf{K}\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{H}_2\delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}_2)$$

- Βοηθητικός πίνακας: $\mathbf{K} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_1)^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_1)^{-1}$

Αλγόριθμος για σταθερές προσεγγιστικές συντ/νες (1/2)

$$\mathbf{N}\,\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \qquad \delta\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \hdashline (\mathbf{N}_{12})^T & \mathbf{N}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta\hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hdashline \delta\hat{\mathbf{x}}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \hdashline \mathbf{u}_2 \end{array}\right]$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1^o + \delta\hat{\mathbf{x}}_1$$

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{N}_{12}\,\cancel{\delta\hat{\mathbf{x}}_2}) = \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1 \qquad \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2^o$$

$$\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{N}_{11} & \cancel{\mathbf{N}_{12}} \\ \hdashline \cancel{(\mathbf{N}_{12})^T} & \cancel{\mathbf{N}_{22}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta\hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hdashline \cancel{\delta\hat{\mathbf{x}}_2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \hdashline \cancel{\mathbf{u}_2} \end{array}\right] \longrightarrow \delta\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1$$

(*) Διαγραφή γραμμών & στηλών από το αρχικό σύστημα ΚΕ

Αλγόριθμος για σταθερές προσεγγιστικές συντ/νες (2/2)

- Εξισώσεις παρατηρήσεων δικτύου

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_1 \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

- Η διαγραφή στηλών από τον πίνακα σχεδιασμού υπονοεί τη χρήση των παρακάτω απόλυτων δεσμεύσεων $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$

- Σύστημα κανονικών εξισώσεων και λύση

$$(\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{b}$$

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{u}_1$$

Παρατήρηση

- Ο γενικός αλγόριθμος συνόρθωσης δικτύου

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{c}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_1 \\ \cdots\cdots \\ \cancel{\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

για την περίπτωση <u>σταθερών προσεγγιστικών συντ/νων</u> μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{W} \rightarrow \infty\ , \quad \mathbf{W}^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$$

Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται αναλυτικά ότι: Εξ. (1) $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1 \qquad \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$

Αλγόριθμος συνόρθωσης για χρήση σταθμών αναφοράς με βάρη

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N}+\mathbf{P}_{\mathbf{x}})^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{u}_{\mathbf{x}}) \qquad \text{όπου} \qquad \delta\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{x}}_{new} \\ \hdashline \delta\hat{\mathbf{x}}_{ref} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{ref} \end{array}\right] \qquad \mathbf{u}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{ref}(\mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x}_{ref}^{o}) \end{bmatrix}$$

(*) αν ο πίνακας βάρους τότε οι συντεταγμένες των σταθμών αναφοράς διατηρούνται σταθερές κατά τη συνόρθωση του δικτύου στις τιμές $\mathbf{x}_{ref}$

Υπολογισμός συνορθωμένων παρατηρήσεων και σφαλμάτων (1/3)

- Μέσω του θεωρητικού (μη-γραμμικού) μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$$

- Μέσω του γραμμικοποιημένου μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{o} + \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o}) + \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$$

Υπολογισμός συνορθωμένων παρατηρήσεων και σφαλμάτων (2/3)

- Μέσω του θεωρητικού (μη-γραμμικού) μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o} + \delta\hat{\mathbf{x}})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$$

Ισοδύναμα αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται **επαναληπτικός αλγόριθμος συνόρθωσης** (για την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων γραμμικοποίησης)

- Μέσω του γραμμικοποιημένου μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{o} + \mathbf{A}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o}) + \mathbf{A}\delta\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\delta\hat{\mathbf{x}}$$

Υπολογισμός συνορθωμένων παρατηρήσεων και σφαλμάτων (3/3)

- Όταν συμμετέχουν και πρόσθετες παραμέτροι
- Μέσω του θεωρητικού (μη-γραμμικού) μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}^{o} + \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{q}})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}})$$

- Μέσω του γραμμικοποιημένου μοντέλου

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{o}, \mathbf{q}^{o}) + \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{q}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{q}}$$

Εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς (1/2)

- Συνόρθωση δικτύου με **ελάχιστες δεσμεύσεις**

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{o}}^{2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{f}}$$

Ανεπηρέαστη εκτίμηση

- Δεν εξαρτάται από τον τρόπο ορισμού του ΣΑ.
- Η τιμή της επηρεάζεται από συστηματικά/χονδροειδή σφάλματα στις μετρήσεις δικτύου και από την ορθότητα του πίνακα βάρους P.
- Μπορεί να αξιοποιηθεί για τον ολικό έλεγχο αξιοπιστίας του δικτύου και την ποιοτική αξιολόγηση των μετρήσεων.

Εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς (2/2)

- Συνόρθωση δικτύου με **πλεονάζουσες δεσμεύσεις**

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{o}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{f}}$$

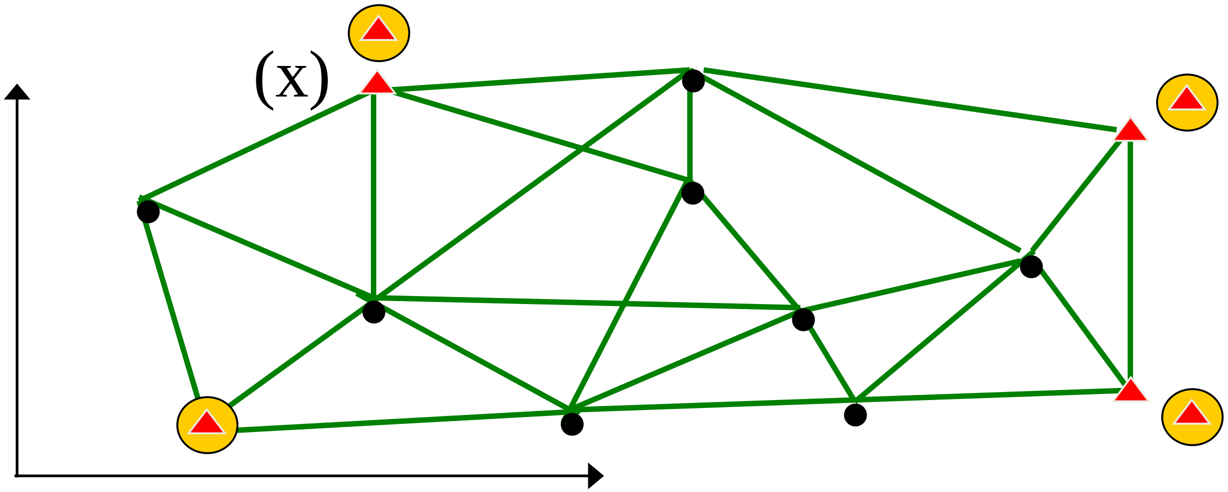
Επηρεασμένη εκτίμηση

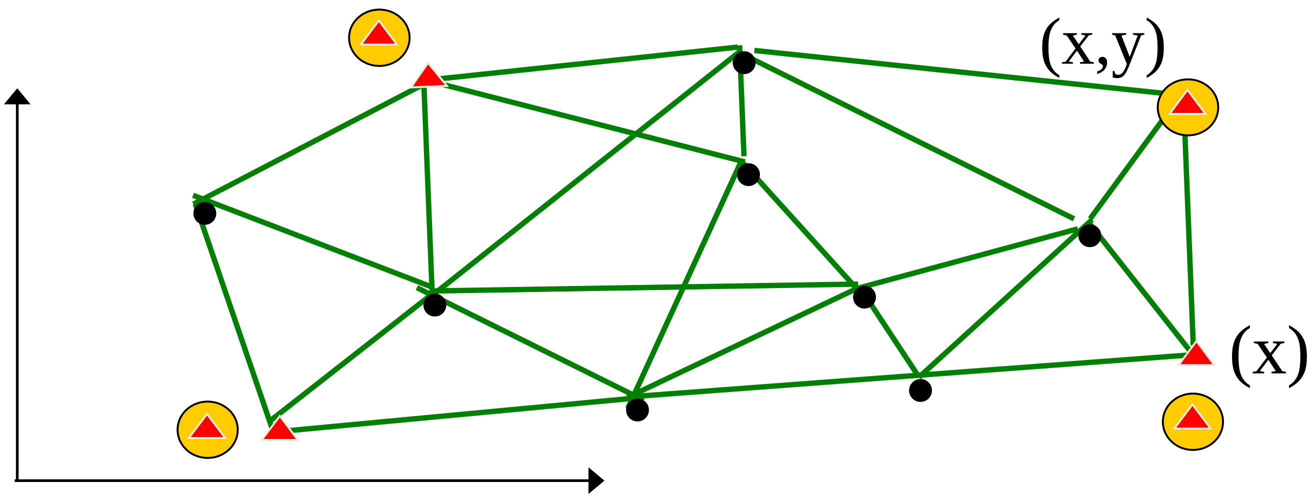
- Εξαρτάται από τον τρόπο ορισμού του ΣΑ.
- Η τιμή της επηρεάζεται από συστηματικά/χονδροειδή σφάλματα στις μετρήσεις και στις ψευδο-παρατηρήσεις, και από την ορθότητα του πίνακα βάρους P.
- Μπορεί να αξιοποιηθεί για τον έλεγχο αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων (π.χ. έλεγχος ένταξης δικτύου) αλλά όχι για την ποιοτική αξιολόγηση των μετρήσεων.

Σχόλιο (1)

- Τα παρακάτω μεγέθη παραμένουν αναλλοίωτα κατά τη συνόρθωση ενός δικτύου με **ελάχιστες δεσμεύσεις.**
- Συνορθωμένες παρατηρήσεις και συνορθωμένα σφάλματα. $\hat{\mathbf{y}}$ $\hat{\mathbf{v}}$
- Βαθμοί ελευθερίας συνόρθωσης. f
- A posteriori εκτίμησης της μεταβλητότητας αναφοράς. $\hat{\sigma}_{\mathrm{o}}^2$
- Αντίθετα, η λύση και οι τελικές συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου εξαρτώνται από την επιλογή των ελαχίστων δεσμεύσεων.

Συνόρθωση του ίδιου δικτύου με διαφορετικές ελάχιστες δεσμεύσεις





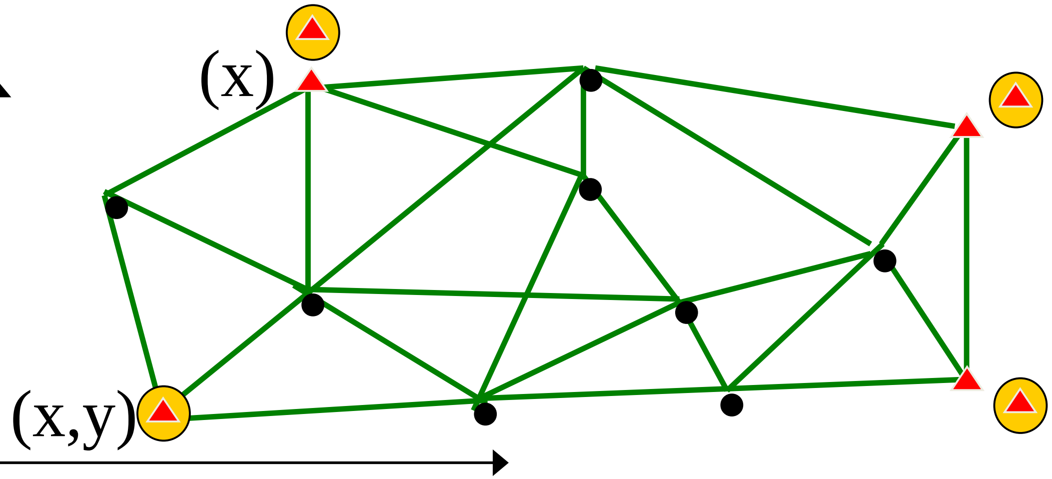
Σχόλιο (2)

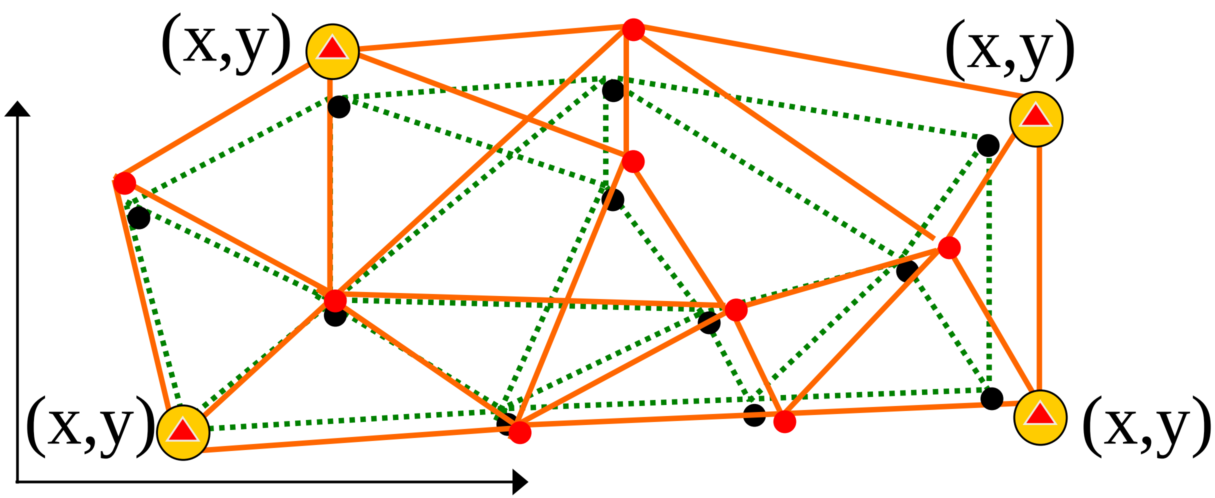
- Στην περίπτωση συνόρθωσης με **πλεονάζουσες δεσμεύσεις** όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη που απαρτίζουν τη λύση δικτύου, δηλαδή

$$\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\mathbf{y}} \quad \hat{\mathbf{v}} \quad \mathrm{f} \quad \hat{\sigma}_{\mathrm{o}}^{2}$$

εξαρτώνται τόσο από την επιλογή των δεσμεύσεων (**c**, **H**) όσο και από τον πίνακα βάρους (**W**) με τον οποίο αυτές εισάγονται στον αλγόριθμο συνόρθωσης δικτύου.

Συνόρθωση του ίδιου δικτύου με ελάχιστες και πλεονάζουσες δεσμεύσεις





Ελάχιστες ή πλεονάζουσες δεσμεύσεις;

- **Βασικά πλεονεκτήματα λύσης ελάχιστων δεσμεύσεων:**
  - η γεωμετρική μορφή του δικτύου δεν επηρεάζεται από τον τρόπο ορισμού του συστήματος αναφοράς.
  - μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ποιοτικό έλεγχο των μετρήσεων (ανίχνευση μη-τυχαίων σφαλμάτων, έλεγχος στοχαστικού μοντέλου, κ.λπ.).
- **Βασικά πλεονεκτήματα λύσης πλεοναζουσών δεσμεύσεων:**
  - βελτιώνει τη λύση ελαχίστων δεσμεύσεων σε περιπτώσεις δικτύων με “κακές μετρήσεις”.
  - μπορεί να βελτιώσει την ένταξη του δικτύου σε κάποιο προυπάρχον πλαίσιο αναφοράς συντεταγμένων.

Εισαγωγή γεωμετρικών δεσμεύσεων (1/2)

- Σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. δίκτυα ειδικών εφαρμογών) εκτός από τις αναγκαίες δεσμεύσεις για τον ορισμό του ΣΑ κατά τη συνόρθωση ενός δικτύου.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0},\ \sigma_o^2\,\mathbf{P}^{-1})$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}} \qquad \tilde{\mathbf{v}} \sim (\mathbf{0},\ \mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{v}}})$$

υπάρχει η ανάγκη εισαγωγής (και ελέγχου) πρόσθετων δεσμεύσεων **γεωμετρικού χαρακτήρα**

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$$

π.χ. συνθήκη συγγραμικότητας σημείων, συνθήκη καθετότητας ευθειών, κ.λπ.

Εισαγωγή γεωμετρικών δεσμεύσεων (2/2)

- Οι πρόσθετες γεωμετρικές δεσμεύσεις μπορούν γενικά να εισαχθούν στη συνόρθωση ενός δικτύου με δύο εναλλακτικούς τρόπους:
  – **ταυτόχρονα** με τις δεσμεύσεις του ΣΑ χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους αλγόριθμους συνόρθωσης πλεοναζουσών δεσμεύσεων.
  – **μετά** από τις δεσμεύσεις του ΣΑ χρησιμοποιώντας το διαχωρισμένο αλγόριθμο εισαγωγής πλεοναζουσών δεσμεύσεων.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 4: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 5: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 6: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 7: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος>< πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χριστόφορος Κωτσάκης, «Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί, Αλγόριθμοι συνόρθωσης δικτύων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευστάθιος Μπουχουράς

Θεσσαλονίκη,

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.